
Modélisation de l'endommagement anisotrope du béton

R. Desmorat

LMT (ENS Cachan, CNRS, Université Paris Saclay), 94235 Cachan, France
desmorat@lmt.ens-cachan.fr

RÉSUMÉ. Un modèle d'endommagement anisotrope est proposé pour les matériaux quasi-fragiles tels que le béton. Comme demandé par la thermodynamique des solides, une seule variable d'endommagement, tensorielle d'ordre 2, est considérée et ce quel que soit le chargement : étant une variable d'état elle représente l'état micro-fissuré de la matière indépendamment du signe du chargement. L'anisotropie de l'endommagement elle-même permet de rendre compte de la forte dissymétrie traction/compression. La variable d'endommagement de Cordebois-Sidoroff-Ladevèze $\mathbf{H} = (\mathbf{1} - \mathbf{D})^{-1/2}$ est introduite dans la modélisation ainsi qu'une partition deviatorique/hydrostatique est faite. Une modélisation originale du couplage dit "shear-bulk" est donnée, en accord avec des résultats numériques obtenus par éléments discrets. La propriété recherchée d'un adoucissement graduel est obtenue (dans le diagramme contrainte-déformation). La triaxialité des contraintes est utilisée afin d'améliorer les performances multi-axiales du critère de Mazars et in fine du modèle d'endommagement anisotrope, en bi-compression notamment.

ABSTRACT. An anisotropic damage model is proposed for quasi-brittle materials such as concrete. As required by thermodynamics a single damage variable, tensorial, is considered for any loading: as a state variable it represents the micro-cracking pattern whatever the loading sign. Damage anisotropy is used to model the strong dissymmetry tension/compression. Cordebois-Sidoroff-Ladevèze damage variable $\mathbf{H} = (\mathbf{1} - \mathbf{D})^{-1/2}$ is introduced within a deviatoric/hydrostatic split. An original shear-bulk coupling is derived, in accordance with numerical discrete element computations. The sought property of gradual stress softening, with a tail in stress-strain diagram, is obtained. Stress triaxiality is used to enhance the performance of Mazars criterion therefore of the full anisotropic damage model, in bicompression for instance.

MOTS-CLÉS : endommagement anisotrope, béton, couplage shear-bulk, triaxialité, dissipation.

KEYWORDS: anisotropic damage, concrete, shear-bulk coupling, triaxiality, dissipation.

1. Introduction

Nous nous attachons ici à proposer un modèle d'endommagement anisotrope valide sous chargement multiaxial monotone ne nécessitant pas de borner numériquement les valeurs propres D_i à 1. Nous nous basons sur la modélisation développée pour un modèle d'endommagement anisotrope dit initial [Desmorat(2004), Desmorat et al(2007)] qui a montré que la prise en compte de l'anisotropie induite permet de modéliser compression et traction avec peu de paramètres (5 au total, incluant les paramètres d'élasticité E et ν). Le modèle initial est basé sur le critère de Mazars et n'est pas satisfaisant sous chargement confiné, en compression notamment. Des pistes d'amélioration (de nouvelles déformations équivalentes) dans le cas d'un endommagement anisotrope ont été proposées par [Ragueneau et al(2008)].

Le couplage "shear-bulk" est reformulé. Cette appellation traduit le fait que le module de cisaillement et le module de compressibilité sont tous deux affectés par la même variable d'endommagement. Le modèle d'endommagement proposé *i*) utilisera la variable $\mathbf{H} = (\mathbf{1} - \mathbf{D})^{-1/2}$ [Cordebois and Sidoroff(1982), Ladevèze(1983)] comme variable d'endommagement en lieu et place de la définition classique \mathbf{D} , *ii*) traduira que tant le niveau d'endommagement que son anisotropie induite sont gouvernés par les extensions (comme proposé par [Mazars(1984), Mazars(1986), Ramtani et al(1992)] et *iii*) aura un comportement sous chargement confiné acceptable malgré le fait que les déformations permanentes ne seront pas modélisées.

Les améliorations sous chargement confiné seront obtenues par l'introduction de la triaxialité des contraintes dans le critère de Mazars, définie classiquement comme le rapport contrainte hydrostatique σ_H / contrainte de von Mises σ_{eq} , si $\boldsymbol{\sigma}$ est le tenseur des contraintes,

$$T_X = \frac{1}{3} \frac{\text{tr } \boldsymbol{\sigma}}{\sigma_{eq}} = \frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}} \quad (1)$$

2. Modèle d'endommagement anisotrope avec nouveau couplage shear-bulk

Comparé au modèle initial on fait le changement de variable $\mathbf{H} = (\mathbf{1} - \mathbf{D})^{-\frac{1}{2}}$ et la dépendance à l'endommagement des contributions déviatoriques et hydrostatiques est due à la définition d'une nouvelle contrainte effective (Eq. (3) ci-après). Cette dépendance est rendue homogène à \mathbf{H}^2 . Ce point clef permet de ne plus avoir à borner les valeurs propres $D_i \in [0, 1]$ de l'endommagement (tensoriel) classique \mathbf{D} car $D_i = 1$ correspondent à un état non borné $H_i \in [1, \infty[$ du tenseur \mathbf{H} . Le cas "non endommagé" correspond à $\mathbf{H} = \mathbf{1} \Leftrightarrow \mathbf{D} = \mathbf{0}$ ou $H_{ij} = \delta_{ij} \Leftrightarrow D_{ij} = 0$ en terme de composantes. La pertinence d'utiliser \mathbf{H} comme variable d'état, de loi d'évolution $\dot{\mathbf{H}} = \dots \geq 0$, et éviter ainsi d'avoir à borner les endommagements principaux a été remarquée par [Ladevèze(1983)], puis par [Carol et al(2001)] qui utilise le cadre de Ladevèze mais définit la loi d'évolution de l'endommagement comme $\dot{\mathbf{L}} = 2 \mathbf{H} \cdot \dot{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{H} = 2(\dot{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{H}^{-1} + \mathbf{H}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{H}}) = \dots \geq 0$ à partir du concept d'endommagement pseudo-logarithmique.

2.1. Loi de comportement

Les équations de la loi de comportement proposée pour les matériaux quasi-fragiles sont les suivantes,

– *Elasticité initialement isotrope,*

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}'}{2G} + \frac{1}{9K} \text{tr } \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{1} \quad (2)$$

– *Contrainte effective,*

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = (\mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\sigma}' \cdot \mathbf{H})' + \frac{1}{3} \left[\frac{1}{3} \text{tr } \mathbf{H}^2 \langle \text{tr } \boldsymbol{\sigma} \rangle - \langle - \text{tr } \boldsymbol{\sigma} \rangle \right] \mathbf{1} \quad (3)$$

Combiné à Eq. (2) cela traduit une orthotropie induite due à l'endommagement, y compris lorsque les chargements sont compressifs.

– *Fonction critère d'endommagement,*

$$f = \hat{\epsilon} - \kappa \leq 0 \quad (4)$$

avec $\hat{\epsilon}$ la déformation équivalente de Mazars. La fonction de consolidation est choisie linéaire en $\text{tr } \mathbf{H}$,

$$\kappa = \kappa_0 + SR_\nu^s (\text{tr } \mathbf{H} - 3) \quad (5)$$

avec κ_0 le seuil d'endommagement, et comme autres paramètres caractéristiques du matériau : l'exposant d'endommagement s et la résistance à l'endommagement S , affectée par la triaxialité T_X (négative) par l'intermédiaire de la fonction de triaxialité R_ν [Lemaitre and Chaboche(1985)], ici normée à 1 en cisaillement et possiblement bornée à la valeur $B > R_\nu^c = 3/2(1 + \nu)$ (qui est un paramètre du modèle) afin de modéliser la compression bi-axiale,

$$R_\nu = \min \left[1 + \frac{9}{2} \frac{1 - 2\nu}{1 + \nu} \langle -T_X \rangle^2, B \right] \quad T_X = \frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}} \quad (6)$$

– *Endommagement anisotrope induit* gouverné par la partie positive – en termes de valeurs principales – du tenseur de déformation, $\langle \tilde{\epsilon} \rangle^+$. La loi d'évolution est ici écrite en terme de taux de la variable \mathbf{H} ,

$$\dot{\mathbf{H}} = \dot{\lambda} \langle \tilde{\epsilon} \rangle^+ \quad \tilde{\epsilon} = \mathbf{E}^{-1} : \boldsymbol{\sigma} \quad (7)$$

Le multiplicateur d'endommagement $\dot{\lambda}$ satisfait aux conditions de charge-décharge de Kuhn-Tucker $f \leq 0, \dot{\lambda} \geq 0, \dot{\lambda} f = 0$.

Rappelons que la triaxialité des contraintes a pour valeurs $T_X = 1/3$ en traction ($R_\nu^t = 1$), $T_X = 2/3$ en traction equi-biaxiale ($R_\nu = 1$), $T_X = 0$ en cisaillement ($R_\nu = 1$), $T_X = -1/3$ en compression ($R_\nu = R_\nu^c = 3/2(1 + \nu) > 1$), et $T_X = -2/3$ en compression equi-biaxiale ($R_\nu = 3(1 - \nu)/(1 + \nu) > R_\nu^c > 1$). Une définition standard de la fonction de triaxialité des contraintes est ici préférée à la notion de facteur de réduction de déformation équivalente $\gamma = \sqrt{\langle -\boldsymbol{\sigma} \rangle^+ : \langle -\boldsymbol{\sigma} \rangle^+} / \langle -\text{tr } \boldsymbol{\sigma} \rangle$ introduite par J. Mazars et ses collaborateurs [Mazars(1984), Pontiroli(1995), La Borderie(2003)].

Six (ou cinq) paramètres "matériau" sont introduits au total, selon que B prend la valeur ∞ ou non : E, ν pour l'élasticité, κ_0 comme seuil d'endommagement, la résistance à l'endommagement S , l'exposant de triaxialité s , la paramètre de bi-compression B . Leur nombre est assez faible car l'anisotropie induite est responsable en partie de la dissymétrie traction/compression.

Il n'y a pas d'utilisation – inconsistante d'un point de vue thermodynamique – de variables différentes pour la traction et pour la compression : ce sont en fait des composantes différentes du même tenseur d'endommagement \mathbf{H} (ou \mathbf{D}) qui jouent.

2.2. Bulk modulus

La loi d'élasticité couplée à l'endommagement anisotrope s'inverse analytiquement en $\boldsymbol{\sigma} = \tilde{\mathbf{E}} : \boldsymbol{\epsilon}$ avec aux triaxialités positives T_X (traces $\text{tr } \boldsymbol{\sigma}$ et $\text{tr } \boldsymbol{\epsilon}$ positives) :

$$\tilde{\mathbf{E}} = 2G \left[\mathbf{H}^{-1} \underline{\otimes} \mathbf{H}^{-1} - \frac{\mathbf{H}^{-2} \otimes \mathbf{H}^{-2}}{\text{tr } \mathbf{H}^{-2}} \right] + \frac{3K}{\text{tr } \mathbf{H}^2} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \quad (8)$$

qui tend vers $\mathbf{0}$ comme voulu lorsque $\mathbf{H} \rightarrow \infty$. Aux triaxialités T_X négatives (traces $\text{tr } \boldsymbol{\sigma}$ et $\text{tr } \boldsymbol{\epsilon}$ négatives) :

$$\tilde{\mathbf{E}} = 2G \left[\mathbf{H}^{-1} \underline{\otimes} \mathbf{H}^{-1} - \frac{\mathbf{H}^{-2} \otimes \mathbf{H}^{-2}}{\text{tr } \mathbf{H}^{-2}} \right] + K \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \quad (9)$$

qui tend vers $K \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$ lorsque $\mathbf{H} \rightarrow \infty$. Le module de compressibilité $\tilde{K} = K$ reste inchangé aux triaxialités négatives.

On a donc un module de compressibilité effectif (endommagé) aux triaxialités positives

$$\tilde{K} = \frac{3K}{\text{tr } \mathbf{H}^2} = \frac{3K}{\text{tr } (\mathbf{1} - \mathbf{D})^{-1}} \text{ si } T_X > 0 \quad (10)$$

Il décroît avec l'endommagement comme tracé en Fig. 2.2, où l'endommagement hydrostatique $D_H = D_H = \frac{1}{3} \text{tr } \mathbf{D} = 1 - \frac{1}{3} \text{tr } \mathbf{H}^{-2}$ est classiquement défini en terme de variable \mathbf{D} . Cela donne une variation nonlinéaire dans la plupart des cas incluant la traction uniaxiale $H_1 \geq 1, H_2 = H_3 = 1$. Le cas de traction equi-triaxiale correspond lui à un tenseur d'endommagement sphérique de composantes principales

$$H_i = \frac{1}{\sqrt{1 - D_i}} = \frac{1}{3} \text{tr } \mathbf{H} \quad D_i = 1 - \frac{1}{H_i^2} = 1 - \left(\frac{3}{\text{tr } \mathbf{H}} \right)^2 = \frac{1}{3} \text{tr } \mathbf{D} = D_H \quad (11)$$

Dans ce dernier cas une variation linéaire est obtenue. La perte de raideur de compressibilité is tout à fait similaire à celle obtenue à partir de calculs numériques par éléments discrets.

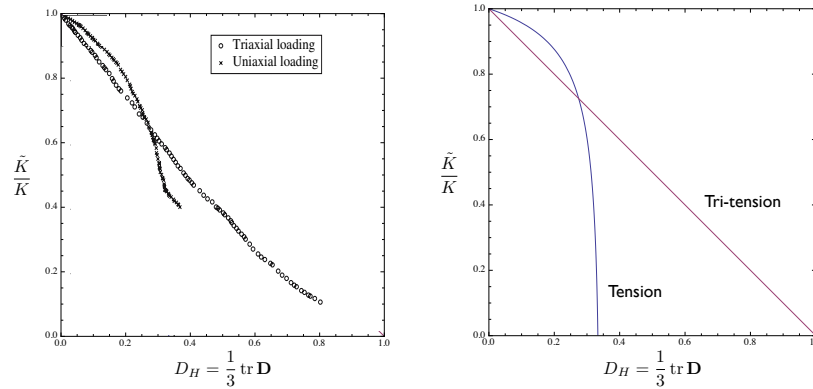


Figure 1. Effective bulk modulus \tilde{K} as a function of hydrostatic damage (of $\sqrt{3}D_H$ on the left). Left : from discrete element computations using $8 \times 8 \times 8 \text{ mm}^3$ cube (computations from [Delaplace and Desmorat(2007)]), right : present damage model.

3. Réponses du modèle d'endommagement anisotrope proposé

Les paramètres du nouveau modèle ont été obtenus par identification croisée à partir de ceux du modèle initial (menée sur la traction et sur la compression). Les contraintes ultimes sont choisies identiques pour les deux modèles ($\sigma_u^t = 3.5 \text{ MPa}$ en traction, $\sigma_u^c = 30.5 \text{ MPa}$ en compression). Les paramètres du modèle proposé sont au final

$$E = 37000 \text{ MPa}, \nu = 0.2, \kappa_0 = 9 \cdot 10^{-5}, S = 1.45 \cdot 10^{-4}, s = 4.9, B = \frac{5}{3}$$

Les réponses du modèle sont données sur les figures suivantes (celles du modèle d'endommagement anisotrope initial étant reportées en pointillés)

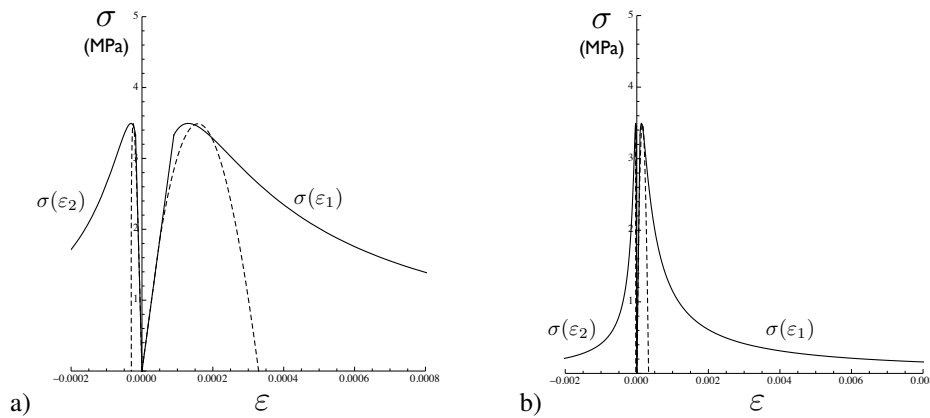


Figure 2. Response of proposed anisotropic damage model in tension (dashed line : initial anisotropic damage model). A larger strain scale used in b).

Remarque concernant la bi-compression

On observe sur la figure 5 le rôle du paramètre B . Avec la valeur $\nu = 0.2$ la même réponse est obtenue pour tout $B \geq 2$ que pour le cas non borné $B \rightarrow \infty$. Le choix $B = 5/3$ est cohérent avec les résultats de [Kupfer et al(1969)] exhibant un ratio contrainte ultime en bicompression / contrainte ultime en compression de ≈ 1.15 , *i.e.* ici une contrainte ultime de 35 MPa en bicompression. Le choix $B = 1.725$ est cohérent avec le ratio de 1.35 obtenu par [Yin et al(1989)] (contrainte ultime de 41 MPa en bicompression).

4. Thermodynamique de l'endommagement tensoriel d'ordre 2

Précisons finalement le cadre thermodynamique du modèle d'endommagement proposé.

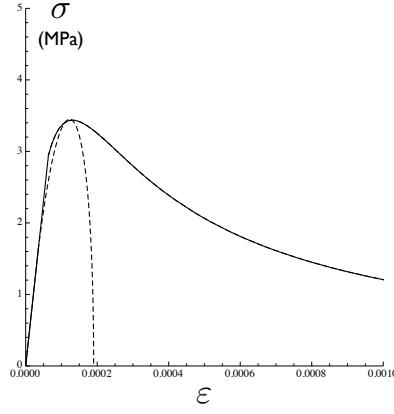


Figure 3. Response of proposed anisotropic damage model in equi-biaxial tension (dashed line : initial anisotropic damage model).

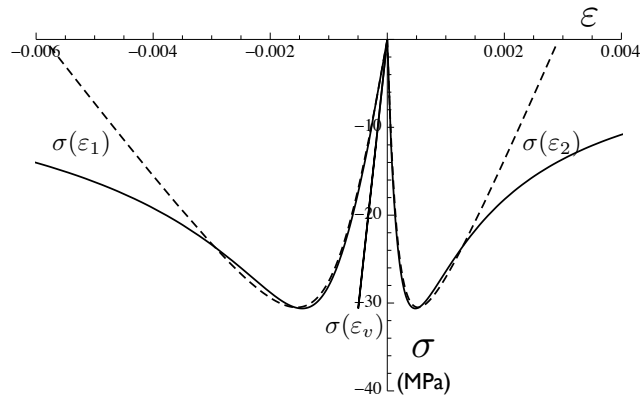


Figure 4. Response of proposed anisotropic damage model in compression (dashed line : initial anisotropic damage model).

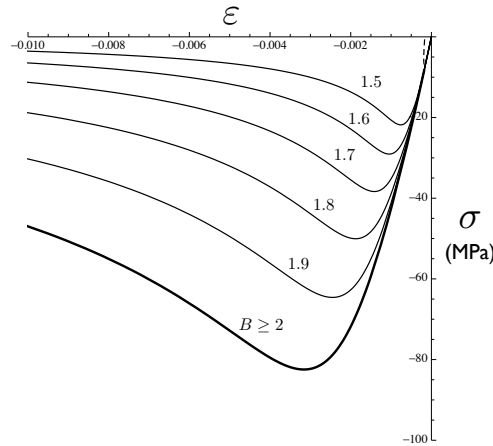


Figure 5. Response of proposed anisotropic damage model in equi-biaxial compression for different values of bicompression parameter B (dashed line : initial anisotropic damage model, thick line : unbounded R_v case $B \rightarrow \infty$ or any case $B \geq 2$).

4.1. Potentiel thermodynamique et lois d'état

Soit ρ la masse volumique, ψ^* l'enthalpie spécifique de Gibbs fonction des tenseurs des contraintes et d'endommagement $\boldsymbol{\sigma}$, \mathbf{H} , symétriques d'ordre 2, considérés comme variables d'état,

$$\rho\psi^*(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{H}) = \frac{1}{4G} \text{tr}(\mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\sigma}' \cdot \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\sigma}') + \frac{1}{18K} \left[\frac{1}{3} \text{tr} \mathbf{H}^2 \langle \text{tr} \boldsymbol{\sigma} \rangle^2 + \langle -\text{tr} \boldsymbol{\sigma} \rangle^2 \right] \quad (12)$$

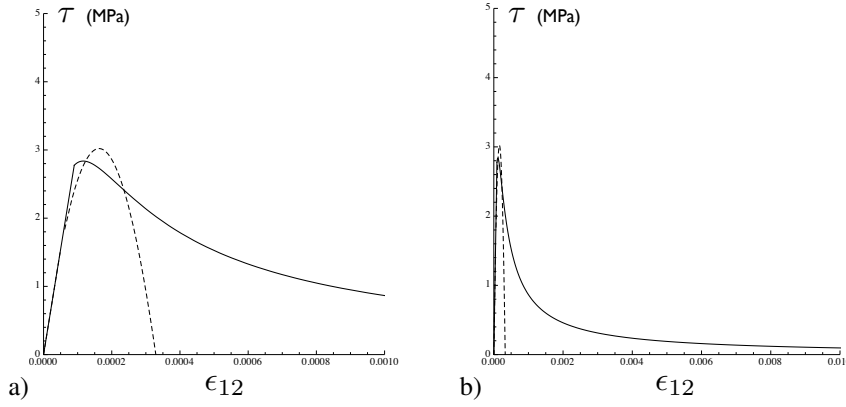


Figure 6. Response of proposed anisotropic damage model in shear (dashed curve : initial anisotropic damage model). A larger strain scale used in b).

Ce potentiel thermodynamique est continûment différentiable [Ladevèze and Lemaitre(1984), Lemaitre et al(2000), Lemaitre and Desmorat(2005)].

Les lois d'état sont :

$$\boldsymbol{\epsilon} = \rho \frac{\partial \psi^*}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad \mathbf{Z} = \rho \frac{\partial \psi^*}{\partial \mathbf{H}} \quad (13)$$

Elles conduisent :

– à la loi d'élasticité couplée à l'endommagement anisotrope ((.)' signifie "partie déviatorique"),

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2G} (\mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\sigma}' \cdot \mathbf{H})' + \frac{1}{9K} \left[\frac{1}{3} \text{tr} \mathbf{H}^2 \langle \text{tr} \boldsymbol{\sigma} \rangle - \langle -\text{tr} \boldsymbol{\sigma} \rangle \right] \mathbf{1} \quad (14)$$

Cette loi d'élasticité couplée à \mathbf{H} définit bien la contrainte effective $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ déjà donnée en Eq. (2) et peut être réécrite comme Eq. (2)-(3).

– à la définition de la force thermodynamique \mathbf{Z} associée à la variable d'endommagement \mathbf{H} ,

$$\mathbf{Z} = \frac{1}{2G} \boldsymbol{\sigma}' \cdot \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\sigma}' + \frac{1}{27K} \langle \text{tr} \boldsymbol{\sigma} \rangle^2 \mathbf{H} \quad (15)$$

4.2. Convexité par rapport à $\boldsymbol{\sigma}$ et \mathbf{H}

La dérivée seconde du potentiel thermodynamique par rapport au tenseur des contraintes (avec \mathcal{H} la fonction de Heaviside et où le produit tensoriel $\underline{\otimes}$ est tel que $\mathbf{H} \underline{\otimes} \mathbf{H} : \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{H}$, le tenseur d'ordre quatre $\mathbf{H} \underline{\otimes} \mathbf{H}$ étant symétrique),

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}}^{-1} = \rho \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial \boldsymbol{\sigma} \partial \boldsymbol{\sigma}} = & \frac{1}{2G} \left[\mathbf{H} \underline{\otimes} \mathbf{H} - \frac{1}{3} (\mathbf{H} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \mathbf{H}) + \frac{1}{9} (\text{tr} \mathbf{H}^2) \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \right] \\ & + \frac{1}{9K} \left[\frac{1}{3} \text{tr} \mathbf{H}^2 \mathcal{H}(\text{tr} \boldsymbol{\sigma}) + \mathcal{H}(-\text{tr} \boldsymbol{\sigma}) \right] \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \end{aligned} \quad (16)$$

Il s'agit de l'inverse du tenseur d'élasticité effectif. La convexité du potentiel thermodynamique $\rho \psi^*$ par rapport au tenseur des contraintes est garantie – grâce à la partition déviatorique/hydrostatique – si $\tilde{\mathbf{E}}^{-1}(\mathbf{X})$ est défini positif pour tout tenseur \mathbf{X} d'ordre 2 non nul, et l'on peut montrer que

$$\mathbf{X} : \tilde{\mathbf{E}}^{-1} : \mathbf{X} = \frac{1}{2G} \text{tr} (\mathbf{X}' \cdot \mathbf{H})^2 + \frac{1}{27K} \left[\frac{1}{3} \text{tr} \mathbf{H}^2 \langle \text{tr} \mathbf{X} \rangle^2 + \langle -\text{tr} \mathbf{X} \rangle^2 \right] > 0 \quad (17)$$

ce qui démontre bien la convexité par rapport à $\boldsymbol{\sigma}$ car $\mathbf{X} : \tilde{\mathbf{E}}^{-1} : \mathbf{X} = 2\rho \psi^*(\mathbf{X}, \mathbf{H}) > 0$ pour tout $\mathbf{X} \neq 0$.

La convexité de $\rho \psi^*$ par rapport au tenseur d'endommagement \mathbf{H} est également obtenue car pour tout $\mathbf{X} \neq 0$ d'ordre 2

$$\mathbf{X} : \rho \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial \mathbf{H} \partial \mathbf{H}} : \mathbf{X} = \frac{1}{2G} \text{tr} (\boldsymbol{\sigma}' \cdot \mathbf{X})^2 + \frac{1}{27K} \langle \text{tr} \boldsymbol{\sigma} \rangle^2 (\text{tr} \mathbf{X})^2 > 0 \quad (18)$$

La convexité par rapport à la variable d'endommagement n'est pas nécessaire. Elle a été recherchée (et obtenue) par [Badel et al(2007)] également dans le cas de l'endommagement anisotrope.

4.3. Loi d'évolution non standard de l'endommagement anisotrope

La fonction critère de Mazars $f = \hat{\epsilon} - \kappa$ est utilisée. Elle n'est pas écrite en terme de force thermodynamique \mathbf{Z} associée à \mathbf{H} , et la loi d'évolution de l'endommagement $\dot{\mathbf{H}} = \dot{\lambda} \langle \tilde{\epsilon} \rangle^+$ (Eq. 7) est non standard : elle ne derive pas d'un potentiel d'évolution parfois encore appelé (pseudo-)potentiel de dissipation (une formulation dans le cadre des matériaux standards généralisés peut être trouvée dans [Ladevèze(1983)]). On doit donc démontrer la positivité de la dissipation intrinsèque (c.f. section suivante). Le multiplicateur d'endommagement $\dot{\lambda} \geq 0$ est déterminé par la condition de cohérence $f = \hat{\epsilon} - \kappa = 0$ & $\dot{f} = \dot{\hat{\epsilon}} - \dot{\kappa} = 0$,

$$\dot{\lambda} = \frac{\text{tr} \dot{\mathbf{H}}}{\text{tr} \langle \tilde{\epsilon} \rangle^+} = \frac{1}{S \text{tr} \langle \tilde{\epsilon} \rangle^+} \frac{d}{dt} (R_\nu^{-s} \hat{\epsilon}) \quad (19)$$

De manière exacte à triaxialité des contraintes positive T_X (i.e. à $\text{tr} \boldsymbol{\sigma} \geq 0$, $R_\nu = 1$) ou en tant qu'approximation dans le cas dans le cas T_X négative ($\text{tr} \boldsymbol{\sigma} \leq 0$), la loi évolution de l'endommagement anisotrope induit s'écrit :

$$\dot{\mathbf{H}} = \frac{1}{SR_\nu^s} \frac{\dot{\hat{\epsilon}}}{\text{tr} \langle \tilde{\epsilon} \rangle^+} = \frac{1}{SR_\nu^s} \frac{\langle \tilde{\epsilon} \rangle^+}{\text{tr} \langle \tilde{\epsilon} \rangle^+} \frac{\langle \epsilon \rangle^+}{\hat{\epsilon}} \dot{\epsilon} \quad (20)$$

4.4. Positivité de dissipation intrinsèque

La dissipation intrinsèque a pour expression $\mathcal{D} = \rho \frac{\partial \psi^*}{\partial \mathbf{H}} : \dot{\mathbf{H}} = \mathbf{Z} : \dot{\mathbf{H}}$ [Lemaitre and Chaboche(1985)] de sorte que

$$\mathcal{D} = \left[\frac{1}{2G} \boldsymbol{\sigma}' \cdot \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\sigma}' + \frac{1}{27K} \langle \text{tr} \boldsymbol{\sigma} \rangle^2 \mathbf{H} \right] : \dot{\mathbf{H}} = \mathbf{A} : \dot{\mathbf{H}} \geq 0 \quad (21)$$

Le dernier terme entre crochets est la somme de deux tenseurs du second ordre positifs $\frac{1}{2G} \boldsymbol{\sigma}' \cdot \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\sigma}'$ et $\frac{1}{27K} \langle \text{tr} \boldsymbol{\sigma} \rangle^2 \mathbf{H}$, car \mathbf{H} est un tenseur symétrique défini positif, de par sa loi d'évolution $\dot{\mathbf{H}} = \dot{\lambda} \langle \tilde{\epsilon} \rangle^+ \geq 0$ (on a les conditions de charge-décharge de Kuhn-Tucker $f \leq 0$, $\dot{\lambda} \geq 0$, $\dot{\lambda} f = 0$, avec f la fonction critère). Le produit scalaire $\mathbf{A} : \dot{\mathbf{H}}$ de deux tenseurs d'ordre 2 positifs est positif [Desmorat(2000)] et donc la dissipation l'est. Cela démontre $\mathcal{D} \geq 0$ et montre que le second principe de la thermodynamique est satisfait, quelque soit le chargement, éventuellement multiaxial, non proportionnel.

5. Conclusion

Un modèle d'endommagement anisotrope a été proposé pour les matériaux quasi-fragiles tels que le béton. Comme le demande la thermodynamique des matériaux solides, une seule variable d'endommagement est introduite, tensorielle d'ordre 2, ce quelque soit le chargement : une variable thermodynamique d'endommagement représente l'état de micro-fissuration du matériau, état certes orienté par le chargement et son histoire, mais état existant que les micro-fissures soient ouvertes ou fermées. La dissymétrie traction/compression est obtenue notamment grâce à l'anisotropie induite de l'endommagement : en traction selon 1 c'est la composante 11 du tenseur d'endommagement qui évolue, en compression selon 1 ce sont les composantes transverses 22 et 33 (égales) du tenseur d'endommagement qui évoluent. Un premier point clef de la modélisation est la considération du tenseur d'ordre deux $\mathbf{H} = (1 - \mathbf{D})^{-1/2}$ de Cordebois-Sidoroff-Ladevèze comme variable d'endommagement en lieu et place de la variable historique d'endommagement D . \mathbf{H} est croissant tout comme D , mais l'état vierge non endommagé correspond à $\mathbf{H} = \mathbf{1}$. L'état complètement dégradé correspond à \mathbf{H} tensoriellement infini (positif). La partition déviatorique/hydrostatique du modèle initial est conservée pour la définition de la contrainte effective. Mais un nouveau couplage entre endommagement jouant sur le module de compressibilité et endommagement jouant sur le cisaillement (ou « shear-bulk coupling ») est proposé. On sait en effet à nouveau qu'il n'y a pas deux variables d'endommagement jouant indépendamment sur la compressibilité et sur le cisaillement. Le couplage cisaillement/compressibilité obtenu sans paramètre « matériau » spécifique est trouvé en accord avec celui calculé numériquement par éléments discrets. La propriété recherchée d'un adoucissement post-pic graduel, de type Mazars (1984) est ici reproduite dans le cas de l'endommagement anisotrope. La bonne performance multiaxiale

du modèle d'endommagement proposé, en bi-compression notamment, est due à une dépendance aux triaxialités négatives du critère de Mazars (étendu simplement ici à l'endommagement anisotrope \mathbf{H} par une consolidation choisie linéaire en trace(\mathbf{H})). Au final un total de seulement 6 (voire 5) paramètres sont introduits incluant les paramètres d'élasticité. Il n'y a pas deux jeux séparés pour la traction et pour la compression. Contrairement au modèle initial, une grande dissymétrie traction/compression peut être obtenue, simplifiant grandement l'identification des paramètres. Les réponses bi-axiales du modèle sont présentées.

6. Bibliographie

- [Badel et al(2007)] Badel P., Godard V., Leblond J.B., Application of some anisotropic damage model to the prediction of the failure of some complex industrial concrete structure, *International Journal of Solids and Structures*, 44 (2007) 5848-5874.
- [Carol et al(2001)] Carol I., Rizzi E., Willam K.. On the formulation of anisotropic elastic degradation. Part I : Theory based on a pseudo-logarithmic damage tensor rate. Part II : Generalized pseudo-Rankine model for tensile damage. *Int. J. of Solids and Structures*, 38(4) :491-518,519-546, 2001.
- [Cordebois and Sidoroff(1982)] Cordebois, J. et Sidoroff, F. (1982). Anisotropic damage in elasticity and plasticity. *Journal de Mécanique Théorique et Appliquée*, numéro spécial, pp. 45-60.
- [Delaplace and Desmorat(2007)] Delaplace, A. and Desmorat, R. (2007). Discrete 3D model as complimentary numerical testing for anisotropic damage. *International Journal of Fracture*, 148 :115-128.
- [Desmorat(2000)] Desmorat, R. (2000). Quasi-unilateral conditions in anisotropic elasticity. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 328(6) :445-450.
- [Desmorat(2004)] Desmorat, R. (2004). Modèle d' endommagement anisotrope avec forte dissymétrie traction/compression, In : 5è journées du Regroupement Francophone pour la Recherche et la Formation sur le Béton (RF2B), 5-6 July, Liège, Belgium.
- [Desmorat(2006)] Desmorat, R. (2006). Positivity of intrinsic dissipation of a class of nonstandard anisotropic damage models. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris*, 334(10) :587-592.
- [Desmorat et al(2007)] Desmorat, R., Gatingt, F. et Ragueneau, F. (2007). Nonlocal anisotropic damage model and related computational aspects for quasi-brittle materials. *Engineering Fracture Mechanics*, 74(10) :1539-1560.
- [Kupfer et al(1969)] Kupfer H., Hilsdorf H.K., Rusch H., Behaviour of concrete under biaxial stresses, *ACI Journal*, vol. 66-52, pp. 656-666, August 1969.
- [La Borderie(1991)] La Borderie C., Phénomènes Unilatéraux dans un Matériau Endommageable : Modélisation et Application à l'Analyse de Structures en Béton. PhD Université Paris 6, ENS-Cachan, 1991.
- [La Borderie(2003)] La Borderie C., Stratégies et Modèles de Calculs pour les Structures en Béton, Habilitation à Diriger des Recherches, Université de Pau et des Pays de l'Adour, France, 2003.
- [Ladevèze(1983)] Ladevèze, P. (1983). On an anisotropic damage theory. In *Proc. CNRS Int. Coll. 351 Villars-de-Lans, Failure criteria of structured media*, J. P. Boehler ed. 1993, pages 355-363.
- [Ladevèze and Lemaitre(1984)] Ladevèze P., Lemaitre J., 1984, Damage effective stress in quasi unilateral conditions, 16th International Congress of Theoretical and Applied Mechanics, Lyngby, Denmark.
- [Lemaitre and Chaboche(1985)] Lemaitre, J., Chaboche, J. L., *Mécanique des matériaux solides*, Dunod 1985, *Mechanics of solid materials* (3rd Edition 2009), Oxford University Press, 1991 (english translation).
- [Lemaitre et al(2000)] Lemaitre, J., Desmorat, R., and Sauzay, M. (2000). Anisotropic damage law of evolution. *Eur. J. Mech., A/ Solids*, 19 :187-208.
- [Lemaitre and Desmorat(2005)] Lemaitre J., Desmorat R., *Engineering Damage Mechanics : Ductile, Creep, Fatigue and Brittle Failures*, Springer, 2005.
- [Mazars(1984)] Mazars, J. (1984). Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non linéaire et à la rupture du béton de structure. Thèse d'Etat Université Paris 6.
- [Mazars(1986)] Mazars J., A description of micro and micro scale damage of concrete structure. *Journal of Engineering Fracture of Mechanics*, 25(5-6) :729-737, 1986.
- [Pontiroli(1995)] Pontiroli C., Comportement au souffle des structures en béton armé, PhD ENS-Cachan, France, 1995.
- [Ragueneau et al(2008)] Ragueneau F., Desmorat R., gatingt F., Anisotropic damage modelling of biaxial behaviour and rupture of concrete structures, *Computers and Concrete*, 5(4), 2008, pp. 417-434.
- [Ramtani et al(1992)] Ramtani, S., Berthaud, Y., Mazars, J., 1992. Orthotropic behaviour of concrete with directional aspects : modelling and experiments. *Nucl. Eng. Design* 133, 97-111.
- [Yin et al(1989)] Yin W.S., Su E.C.M. , Mansur M.A., Hsu T.T.C., Biaxial Tests of Plain and Fiber Concrete, *ACI Materials Journal*, 86(3), (1989) : 236-243.