

---

# Variabilité du module d'Young : influence sur le comportement des voûtes en maçonnerie.

Zanaz Abdelmounaim<sup>1</sup>, Yotte Sylvie<sup>1</sup>, Fazia Fouchal<sup>1</sup>, Chateauneuf Alaa<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Université de Limoges, groupe d'études des matériaux hétérogènes, génie civil et durabilité, boulevard Jacques Derche, 19300 Egletons, France, [abdelmounaim.zanaz@etu.unilim.fr](mailto:abdelmounaim.zanaz@etu.unilim.fr), [sylvie.yotte@unilim.fr](mailto:sylvie.yotte@unilim.fr), [fazia.fouchal@unilim.fr](mailto:fazia.fouchal@unilim.fr)

<sup>2</sup> Université de Clermont, Université Blaise Pascal, Institut Pascal, BP 10448, F-63000 Clermont Ferrand, France, [alaa.chateauneuf@univ-bpclermont.fr](mailto:alaa.chateauneuf@univ-bpclermont.fr)

---

*RÉSUMÉ. L'étude porte sur une méthode d'évaluation probabiliste de la capacité portante et de prédiction du mécanisme de ruine des voûtes maçonnées à l'état limite ultime en tenant compte de la variabilité naturelle du module d'Young de la pierre de construction. D'abord, le modèle de calcul est détaillé. Le mode de rupture adopté est le mode le plus observé, à savoir le mécanisme à quatre rotules. Sur la base de cette hypothèse, l'étude d'une voûte composée de 16 voussoirs est présentée. Le module d'Young des voussoirs est considéré comme étant une variable aléatoire définie par une valeur moyenne et un coefficient de variation CV. Une relation entre la capacité portante de la voûte et la variation des modules des différents voussoirs est proposée. Les mécanismes de ruine, en plus de celui observé suite à un calcul déterministe, sont identifiés pour chacune des valeurs du CV ainsi que leur probabilité d'occurrence. Les résultats montrent que le mécanisme déterministe possède une probabilité d'occurrence qui décroît en fonction du CV alors que le nombre des autres mécanismes ainsi que leur probabilité d'occurrence augmentent en fonction du coefficient de variation du module d'Young. Cela signifie que si une variation importante du module d'Young des voussoirs est avérée, sa prise en compte dans les calculs deviendrait impérative, que ce soit pour la détermination de la capacité portante de la voûte ou pour prédire son mécanisme de ruine.*

*ABSTRACT. This paper presents a methodology for probabilistic assessment of bearing capacity and prediction of failure mechanism of masonry vaults at the ultimate state with consideration of the natural variability of Young's modulus of stones. First, the computation model is explained. The failure mode is the most reported mode, i.e. the four-hinge mechanism. Based on this assumption, the study of a vault composed of 16 segments is presented. The Young's modulus of the segments is considered as random variable defined by a mean value and a coefficient of variation CV. A relationship linking the vault bearing capacity to the modulus variation of voussoirs is proposed. The failure mechanisms, in addition to that observed in the deterministic case, are identified for each CV value as well as their probability of occurrence. The results show that the mechanism observed in the deterministic case has decreasing probability of occurrence in terms of CV, while the number of other mechanisms and their probability of occurrence increase with the coefficient of variation of Young's modulus. This means that if a significant change in the Young modulus of the segments is proven, taken it into account in computations becomes mandatory, both for determining the vault bearing capacity and for predicting its failure mechanism.*

*MOTS-CLÉS : variabilité, probabilité, voûte, maçonnerie, mécanisme.*

*KEYWORDS: variability, probability, vault, masonry, mechanism.*

---

## 1. Introduction

Au cours des deux dernières décennies, un nombre important de travaux de recherche sur l'évaluation du comportement des ouvrages ou éléments d'ouvrage en maçonnerie ont été réalisés. En introduisant la notion du volume élémentaire représentatif VER du complexe maçonnerie (pierres ou briques et mortier), de nombreux auteurs ont proposé des modèles d'homogénéisation en considérant l'appareillage périodique [de BUH 97, PEG 97, LUC 97, ZUC 02, MIS 07, ZUC 09] ou non périodique [CLU 04, GUS 06] en utilisant la méthode « test-window » couplée à un critère probabiliste de convergence [HUE 90] développé pour l'analyse des structures en matériaux composites. L'objectif de ces modèles est de déterminer le volume élémentaire le plus représentatif du point de vue statistique. Toutefois, les caractéristiques homogénéisées du VER sont obtenues en considérant le module d'Young constant pour tous les blocs solides (approche déterministe). Cependant, ce paramètre peut varier considérablement dans un ratio de 1 à 2 pour des pierres extraites du même massif [BIN 03]. Il pourrait être nécessaire d'en tenir compte dans les calculs. L'objectif de cette étude est de présenter une méthodologie permettant d'évaluer la capacité portante et de prédire le mécanisme de ruine des voûtes maçonnées avec la prise en compte de cette variabilité naturelle de la pierre de construction.

L'évaluation du comportement des voûtes en maçonnerie a suscité l'utilisation de plusieurs méthodes : MEXE (Military Engineering experimental Establishment) [PIP 51, CHR 63], la méthode d'analyse limite [KOO 53, DRO 06, CAV 07, MIL 08], REAM (Railway Empirical Assessment Method) [TRA 1871, HAR 07, ORB 08], la méthode de calcul à la rupture [HAR 88, BUH 89], la méthode des éléments finis [ROS 98, FAN 01, REC 2014] et enfin, la méthode des éléments distincts [TOT 09, MIL 12]. La plupart de ces méthodes ont servi de base de développement de plusieurs logiciels et applications informatiques (Archie-M, VOUTE, RING, DIANA ...). La majorité des méthodes disponibles destinées à l'évaluation du comportement des voûtes en maçonnerie sont de nature déterministe. Elles peuvent prédire la capacité portante à condition que toutes les variables impliquées dans la réponse mécanique soient supposées comme étant des valeurs déterministes, ce qui n'est pas le cas en raison des incertitudes impliquées dans la géométrie, les matériaux, les charges ...etc. Les méthodes basées sur la fiabilité des structures ont été développées dans ce sens. Ces méthodes prennent en compte les incertitudes des variables impliquées, telles que les simulations de Monte Carlo [NG 02]. La plupart des expériences réalisées ont montré les sommes pouvant être économisées par une évaluation précise et efficace basée sur une approche probabiliste [CAS 11]. Cette dernière nécessite souvent d'effectuer un grand nombre de calculs de la réponse mécanique, c'est pourquoi, dans la présente étude, un compromis a été trouvé entre le temps de calcul et la précision.

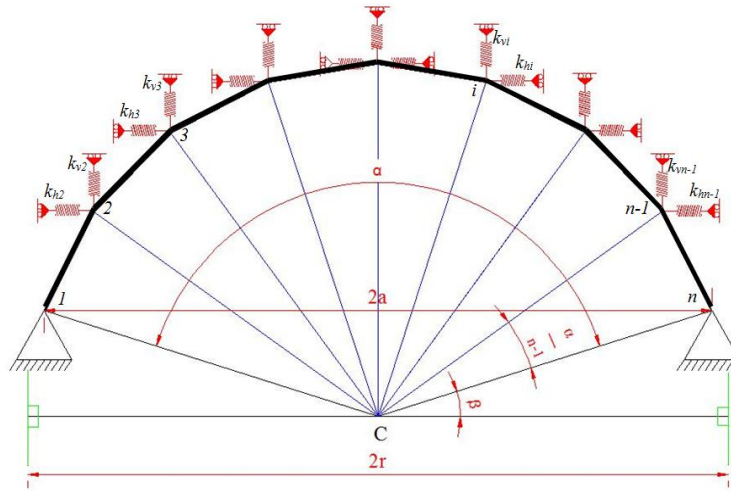
Dans cette étude, l'analyse d'une voûte composée de 16 voussoirs est présentée. Le module d'Young des voussoirs est considéré comme étant une variable aléatoire définie par une valeur moyenne et un coefficient de variation CV. La voûte est assimilée à une ossature plane formée d'éléments poutres à deux nœuds chargées en flexion et en compression. La formation de rotules est conditionnée par le théorème du tiers central (formation d'une rotule si le centre de pression au niveau d'un joint sort du tiers central de l'épaisseur de la voûte) et la formation de quatre rotules successives est synonyme de mécanisme de ruine. Le calcul est implémenté dans un logiciel développé à cet effet (ArcProg\_Z).

## 2. Modèle de calcul

Le mode de rupture d'une voûte est généralement global. En effet, les tests expérimentaux effectués sur des ponts montrent que la rupture d'une arche est normalement de nature globale et qu'il est rare que ce soit causé par la rupture de l'un de ses composants [CAS 11]. Le modèle choisi permet cette analyse globale de la voûte tout en minimisant au maximum le temps de calcul. Les caractéristiques homogénéisées de chaque voussoir sont condensées au niveau de sa fibre moyenne. La résistance à la traction est supposée nulle, ce qui permet d'appliquer le théorème du tiers central adopté dans cette étude et qui conditionne la formation des rotules. Lorsque les déformations ont pour effet de buter la structure de la voûte contre le remplissage, la réaction de celui-ci est modélisée, en utilisant la méthode du module de réaction ou modèle de Winkler [COR 79], par des ressorts horizontaux et verticaux agissant en chacun des nœuds ( $i$ ) et affectés par des coefficients de raideur ( $k_{hi}$  et  $k_{vi}$ ) tenant compte du module de réaction du terrain et de la surface de contact correspondant à chaque nœud (Fig. 1). En revanche, cette raideur des ressorts est nulle lorsque les déformations ont pour effet d'éloigner la structure de la voûte du remblai.

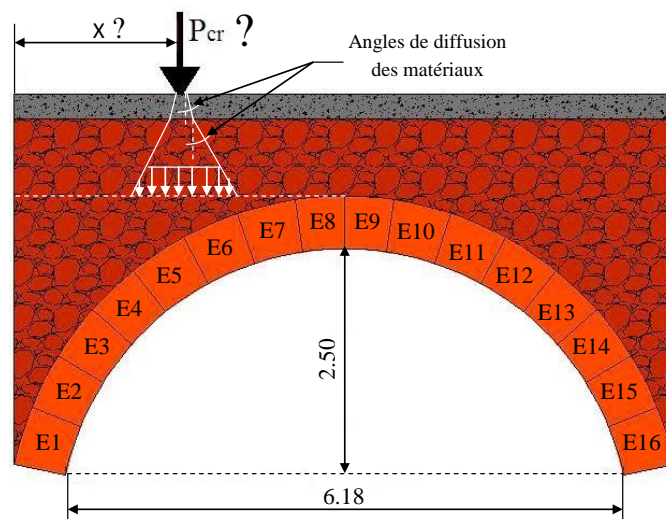
Le principe du calcul probabiliste consiste à affecter aux voussoirs des valeurs du module d'Young de façon tout à fait aléatoire Fig. 2. ArcProg\_Z calcule ensuite la valeur de la charge critique ainsi que sa position et détermine le mécanisme de ruine correspondant à chaque combinaison de valeurs affectées. Le calcul est répété

pour 10000 combinaisons soient 160000 valeurs du module d'Young tirées aléatoirement par le programme développé suivant une loi normale définie par une valeur moyenne et un coefficient de variation. Aucune valeur négative du module n'a été tirée (les paramètres de la loi normale en rendent la probabilité très faible). Ainsi aucun biais statistique n'est introduit dans la méthode.



**Figure 1.** Modélisation de la réaction du terrain de remplissage.

Trois valeurs du coefficient de variation du module d'Young (5, 10 et 20%) ont été considérées pour cette simulation visant à déterminer l'influence de cette variabilité sur le comportement global de la voûte. La valeur moyenne est prise égale à 48GPa. Pour chaque combinaison de valeurs du module affectée, la position de la charge ponctuelle est déplacée le long de la demi-voûte avec un pas de 0,25m. ArcProg\_Z détermine ensuite la valeur de la charge critique correspondant à chaque position en augmentant la charge ponctuelle avec un pas de 5 kN jusqu'à l'apparition des 4 rotules satisfaisant le critère de rupture choisi. Ceci permet de déduire la valeur minimale des charges critiques calculées, c'est-à-dire la capacité portante de la voûte, la position X de cette charge minimale ainsi que la position des 4 rotules formant le mécanisme de ruine. La voûte étudiée est composée de 16 voussoirs (Fig. 2), son ouverture, sa flèche, la hauteur de voussoirs, la hauteur du remplissage à la clé et la hauteur de voie de roulement sont respectivement de 6,18m, de 2,50m et de 0,58m, de 0,85m et de 0,28m. Les paramètres physiques et mécaniques pris en compte dans la suite de cette étude sont résumés dans le tableau 1.



**Figure 2.** Modèle de chargement.

Le modèle tient compte du poids de la voie de roulement, du poids du remplissage et d'une charge ponctuelle appliquée en surface ainsi que de sa diffusion longitudinale et transversale, au travers des matériaux de chaussée et du remplissage, selon les angles de diffusions propres à ces matériaux. La profondeur de diffusion est restreinte à la hauteur du remplissage au droit de la clé de voûte. L'outil numérique développé calcule le vecteur charges nodales équivalentes à l'ensemble des charges suscitées.

Les résultats obtenus sont exploités de trois angles différents. Le premier concerne la variation de la capacité portante de la voûte en fonction des combinaisons de valeurs du module affectées aux voussoirs. Le second observe les positions des différentes rotules formées et le troisième angle étudie l'importance de la prise en compte de cette variabilité du module dans les calculs.

**Tableau 1.** Caractéristiques physiques et mécaniques de la voûte étudiée.

Désignation	Unité	Valeur
Poids volumique de la voie de roulement	kN/m <sup>3</sup>	21
Poids volumique du remplissage	kN/m <sup>3</sup>	18
Cohésion du remplissage	kN/m <sup>2</sup>	0
Angle de frottement interne du remplissage	rad	$\pi/6$
Angle de diffusion de la voie de roulement	rad	$\pi/6$
Angle de diffusion du remplissage	rad	$\pi/6$
Résistance à la traction des voussoirs	kN/m <sup>2</sup>	0
Module d'Young du remplissage	kN/m <sup>2</sup>	20.10 <sup>3</sup>

### 3. Influence de la variabilité du module d'Young sur la capacité portante

Les 10000 valeurs de la charge critique obtenues suite aux simulations de Monte Carlo sont classées par ordre de grandeur et regroupées dans des classes de chargement de 5 kN.

Si les charges critiques  $P_{cr1}$ ,  $P_{cr2}$ , ...,  $P_{crk}$  apparaissent respectivement  $a_1$ ,  $a_2$ , ...,  $a_k$  fois, avec  $P_{cr1} < P_{cr2} < \dots < P_{crk}$ , la densité de probabilité de chacune de ces charges est donnée par la relation :

$$p(p_{cri}) = \frac{a_i}{\sum_1^k a_i} = \frac{a_i}{10000} \quad [1]$$

Cette densité de probabilité est également associée à une probabilité cumulée  $P(P_{cri})$ , qui est la somme des densités jusqu'à certain groupe  $P_{crj}$ . La Fig. 3 donne la densité de probabilité de la charge critique ainsi que sa fonction de répartition pour la valeur de CV de 10%. La probabilité cumulée est équivalent à l'aire sous la courbe de densité. On note :

$$P(p_{cri}) = \frac{\sum_1^j a_i}{\sum_1^{18} a_i} = \frac{\sum_1^j a_i}{10000} \quad [2]$$

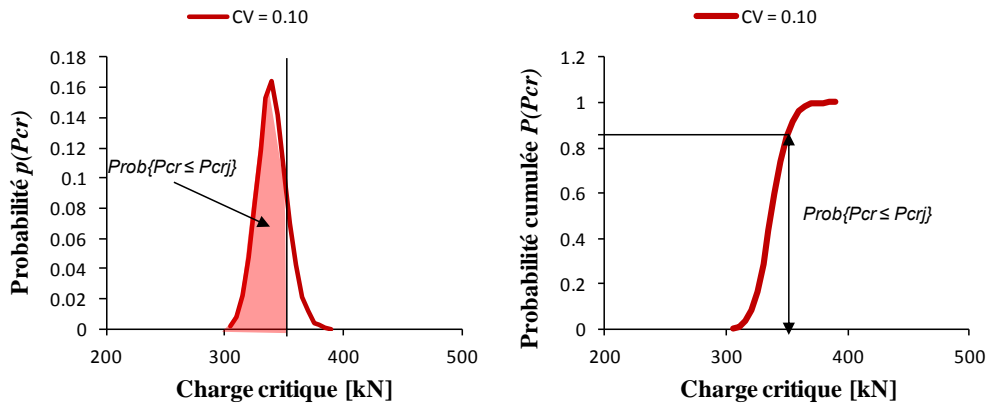


Figure 3. Densité de probabilité et fonction de répartition de la charge critique (CV=10%).

Les trois distributions obtenues, relatives aux trois valeurs de CV (5, 10 et 20%), semblent être symétriques et d’une valeur médiane de 340 kN. Le test de normalité a prouvé qu’il s’agit bien des distributions normales et que des distributions autour d’une valeur moyenne de 340 kN avec des écarts-type de 6,44, 12,55 et 27,23 kN s’ajustent aux distributions de fréquences précédentes avec des erreurs de 0,98%, 0,93% et 4,77% respectivement.

Le domaine de variation de la charge critique s’élargit en fonction de la valeur du coefficient de variation. La considération d’une valeur moyenne serait inappropriée car la perte de stabilité se produira dès qu’une variation extrême des modules d’Young des voussoirs se réalise. Les distributions statistiques fondamentales ne sont pas adaptées à l’analyse de ce cas et le calcul des valeurs extrêmes est nécessaire afin de prédire une charge critique limite qui constitue l’information sur la capacité portante de la voûte étudiée.

La proportion de la charge critique de valeur inférieure à 305 kN (à titre d’exemple) peut être lue directement sur le graphe des probabilités cumulées de la Fig. 4. Le tableau 2 donne quelques valeurs caractéristiques des trois distributions.

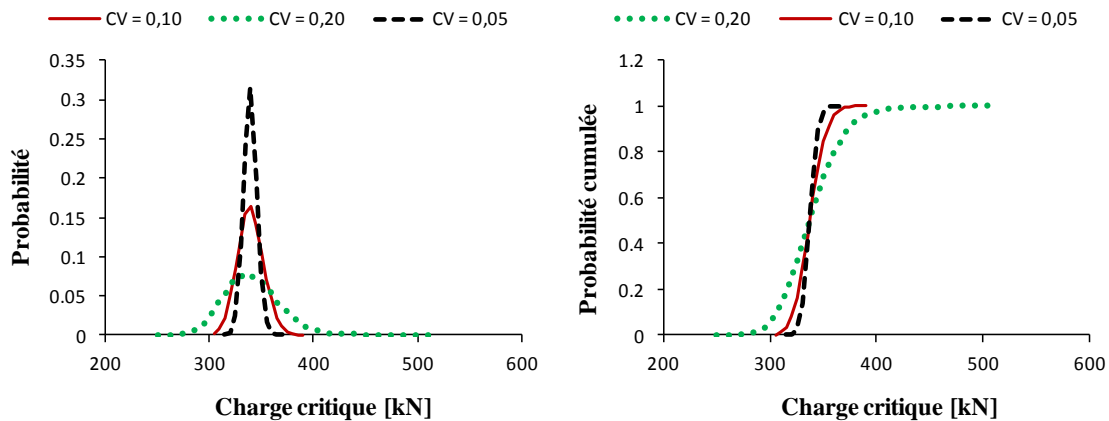


Figure 4. Probabilité et fonctions de répartition de  $P_{cr}$  (CV=5, 10 et 20%).

Tableau 2. Valeurs caractéristiques.

	Domaine de $P_{cr}$				Quantiles				
	Min	Max	$\mu$	Ecart type	1%	2%	3%	4%	5%
$P_{cr}$ (CV=0,05)	315	370	340	6,437	324,38	326,14	327,25	328,09	328,77
$P_{cr}$ (CV=0,10)	305	390	340	12,550	310,59	314,02	316,19	317,82	319,15
$P_{cr}$ (CV=0,20)	250	515	340	27,226	277,93	285,35	290,06	293,60	296,48

Dans les trois cas, limiter la capacité portante de la voûte à la valeur minimale assurera sa stabilité avec une probabilité de 0,998 et ce quelques soient les valeurs des modules d’Young des différents voussoirs appartenant

aux trois domaines définis par la valeur moyenne de 48 GPa et les trois coefficients de variation. Si les gestionnaires des ouvrages veulent se contenter d'une limite de confiance inférieure (95% par exemple), la capacité portante est augmentée de 4 à 16%. Dans tous les cas la considération de la valeur moyenne de la charge critique comme étant la capacité portante peut mettre en péril la stabilité de l'ouvrage. Il convient aussi de préciser que la valeur moyenne correspond à la capacité portante de la voûte sans la prise en compte de la variabilité des modules d'Young des voussoirs (le cas déterministe).

Il est donc important de trouver une relation qui relie la charge critique aux modules d'Young des différents voussoirs et qui définit l'influence de cette variabilité sur la valeur de la capacité portante de la voûte. Pour cela nous avons effectué une régression linéaire en utilisant le critère des moindres carrés et qui nous a conduit à la relation :

$$\begin{aligned} P_{cr} = 10^{-7} \cdot [ & 4,88E_1 + 3,85E_2 + 1,58E_3 + 0,44E_4 + 1,7E_5 + 4,92E_6 + 6,85E_7 \\ & + 4,96E_8 + 0,45E_9 - 4,74E_{10} - 8,77E_{11} - 10,82E_{12} - 10,82E_{13} - 7,28E_{14} \\ & - 0,17E_{15} + 12,34E_{16} ] + 341 \end{aligned} \quad [ 3 ]$$

Que l'on peut écrire sous la forme :

$$P_{cr} = \sum_1^{16} a_i (E_i) + P_0 \quad [ 4 ]$$

La formule [ 4 ] est composée de deux parties, la première variable et représente l'influence de la variabilité du module d'Young des voussoirs sur la charge critique. La seconde partie constante n'est autre que la valeur moyenne de la charge critique car pour un E constant sur toute la voûte la première partie de la formule ci-dessus s'annule ce qui impose :

$$\begin{cases} \sum_1^{16} a_i = 0 \\ P_{cr} = P_0 = \mu \end{cases} \quad [ 5 ]$$

La relation finale s'écrit :

$$P_{cr} = \sum_1^{16} a_i (E_i) + \mu \quad [ 6 ]$$

La formule [ 6 ] est valable pour une charge ponctuelle appliquée sur la partie gauche de la voûte. Pour une charge appliquée sur la partie droite la formule devient :

$$P_{cr} = \sum_1^{16} a_i (E_{17-i}) + \mu \quad [ 7 ]$$

Si on pose :  $E_i = \bar{E} + \Delta E_i$ , avec :  $\bar{E}$  est la valeur moyenne du module d'Young. La formule [ 6 ] donne :

$$P_{cr} = \sum_1^{16} a_i (E_i) + \mu = \sum_1^{16} a_i (\bar{E} + \Delta E_i) + \mu = \bar{E} \cdot \sum_1^{16} a_i + \sum_1^{16} a_i (\Delta E_i) + \mu \quad [ 8 ]$$

$$\sum_1^{16} a_i = 0 \Rightarrow P_{cr} = \sum_1^{16} a_i (\Delta E_i) + \mu \quad [ 9 ]$$

Il en découle de la formule [ 7 ] :

$$P_{cr} = \sum_1^{16} a_i (\Delta E_{17-i}) + \mu \quad [ 10 ]$$

Ainsi, les formules [ 9 ] et [ 10 ] s'écrivent respectivement sous la forme :

$$\begin{aligned} P_{cr} = 10^{-7} \cdot [ & 4,88\Delta E_1 + 3,85\Delta E_2 + 1,58\Delta E_3 + 0,44\Delta E_4 + 1,7\Delta E_5 + 4,92\Delta E_6 + 6,85\Delta E_7 \\ & + 4,96\Delta E_8 + 0,45\Delta E_9 - 4,74\Delta E_{10} - 8,77\Delta E_{11} - 10,82\Delta E_{12} - 10,82\Delta E_{13} - 7,28\Delta E_{14} \\ & - 0,17\Delta E_{15} + 12,34\Delta E_{16} ] + 340 \end{aligned} \quad [ 11 ]$$

$$P_{cr} = 10^{-7} \cdot [4,88\Delta E_{16} + 3,85\Delta E_{15} + 1,58\Delta E_{14} + 0,44\Delta E_{13} + 1,7\Delta E_{12} + 4,92\Delta E_{11} + 6,85\Delta E_{10} + 4,96\Delta E_9 + 0,45\Delta E_8 - 4,74\Delta E_7 - 8,77\Delta E_6 - 10,82\Delta E_5 - 10,82\Delta E_4 - 7,28\Delta E_3 - 0,17\Delta E_2 + 12,34\Delta E_1] + 340 \quad [12]$$

### 3.1. Analyse des résultats

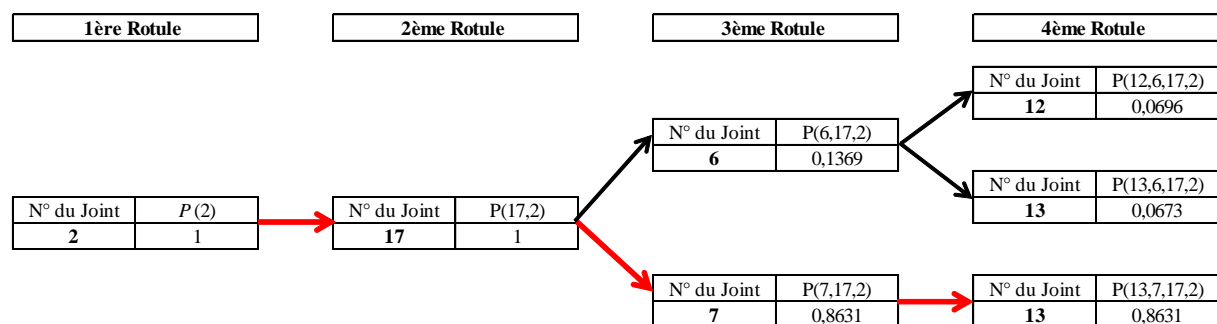
Si on observe les formules [11] et [12], on peut constater que les variations du module des voussoirs : 1, 8, 9 et 16 sont pondérées par des coefficients positifs quelle que soit la position de la charge ponctuelle. Cela veut dire que le fait d'assurer des valeurs de module supérieures à la valeur moyenne  $\bar{E}$  de ces voussoirs conduira certainement à une augmentation de la capacité portante de la voûte contrairement aux autres voussoirs (Tableau 3) où la variation du module aura un effet inverse quand la charge bascule vers l'autre moitié de la voûte. Réciproquement, une diminution des modules des voussoirs suscités donne des variations  $\Delta E$  négatives, pondérées par des coefficients positifs, conduit à une diminution certaine de la capacité portante de la voûte.

**Tableau 3.** Valeurs des  $a_i$  en fonction de la position de la charge ponctuelle  $P$ .

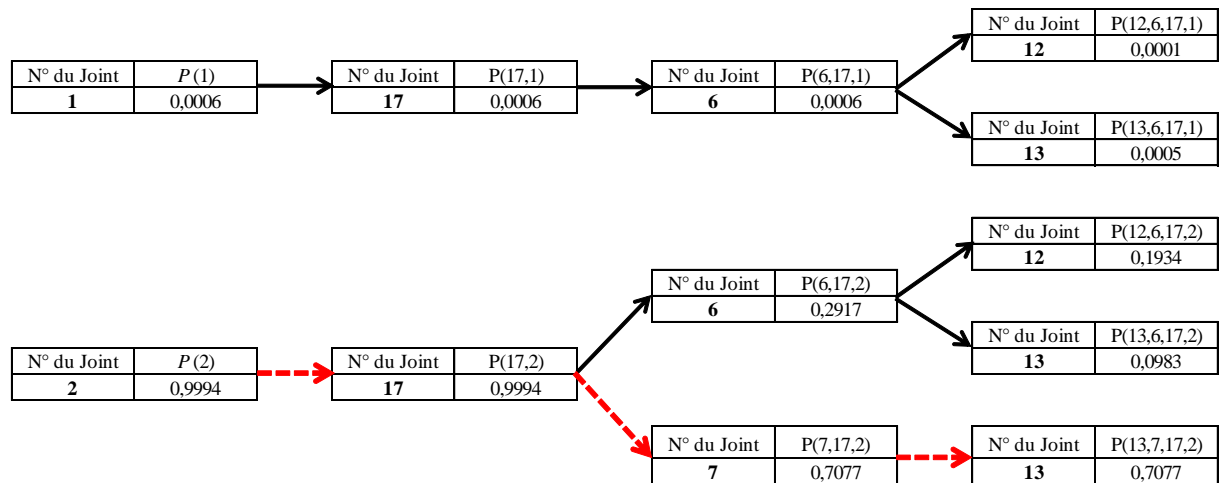
Numéro de Voussoirs	P appliquée sur la moitié :		Numéro de Voussoirs	P appliquée sur la moitié :	
	Gauche [ $\times 10^{-7}$ ]	Droite [ $\times 10^{-7}$ ]		Gauche [ $\times 10^{-7}$ ]	Droite [ $\times 10^{-7}$ ]
1	4,88	12,34	9	0,45	4,96
2	3,85	-0,17	10	-4,74	6,85
3	1,58	-7,28	11	-8,77	4,92
4	0,44	-10,46	12	-10,82	1,7
5	1,7	-10,82	13	-10,46	0,44
6	4,92	-8,77	14	-7,28	1,58
7	6,85	-4,74	15	-0,17	3,85
8	4,96	0,45	16	12,34	4,88

La variation du module des voussoirs : 2 à 7 et 10 à 15 doit être faible c'est-à-dire les modules de ces voussoirs doivent être proches de leur valeur moyenne particulièrement les voussoirs : 3 à 6 et 11 à 14 qui constituent les reins de la voûte. Une perte d'épaisseur au niveau de l'un de ces voussoirs réduit sensiblement la capacité portante de la voûte et par voie de conséquence, augmente le risque d'effondrement de l'ouvrage. Il est donc recommandé lors de l'inspection de commencer en premier lieu par les naissances de la voûte, puis les reins et enfin la clé de voûte. Le même ordre de priorité est maintenu dans la phase réparation. Cela peut servir pour optimiser la planification des inspections et des réparations et par conséquent des dépenses budgétaires.

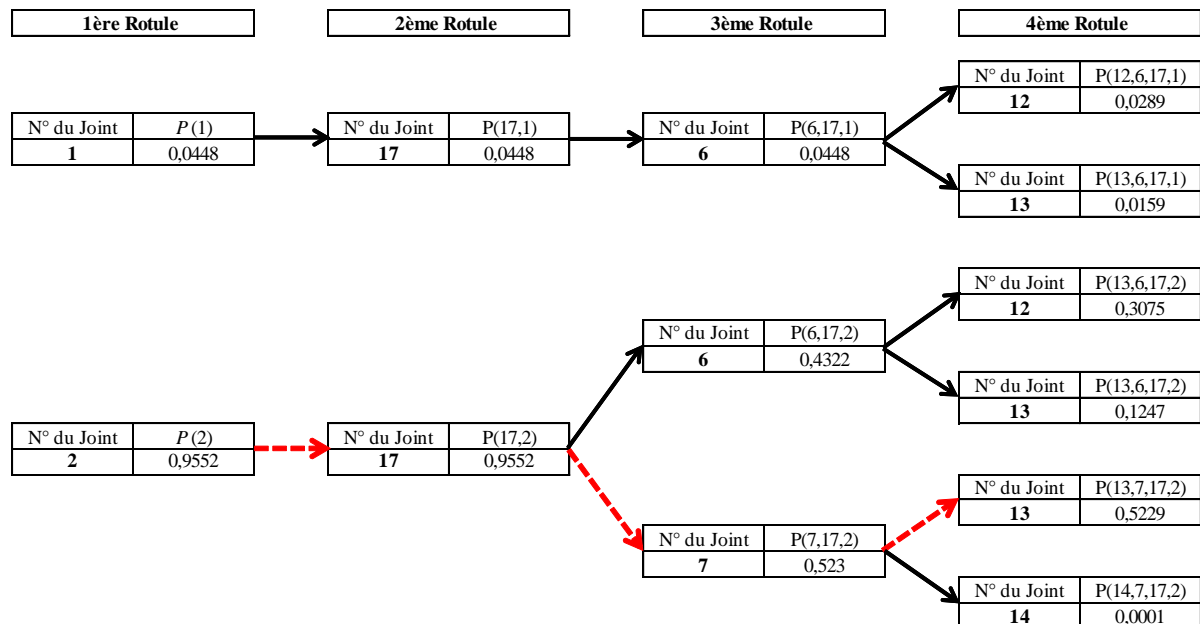
### 4. Influence de la variabilité du module d'Young sur le mécanisme de ruine



**Figure 5.** Probabilité des positions d'apparition des rotules ( $CV=0,05$ ).



**Figure 6.** Probabilité des positions d'apparition des rotules ( $CV=0,10$ ).



**Figure 7.** Probabilité des positions d'apparition des rotules ( $CV=0,20$ ).

ArcProg\_Z détermine la position des rotules des mécanismes provoquant la ruine de l'ouvrage. La position des rotules a donc été déterminée dans les trois cas traités. Les résultats ont été triés par mécanisme. La probabilité d'apparition de chaque rotule a été également calculée. Les Fig. 5, 6 et 7 donnent un récapitulatif des résultats obtenus dans le cas de chargement à gauche de la clé de voûte pour les différentes valeurs du coefficient de variation considérées.

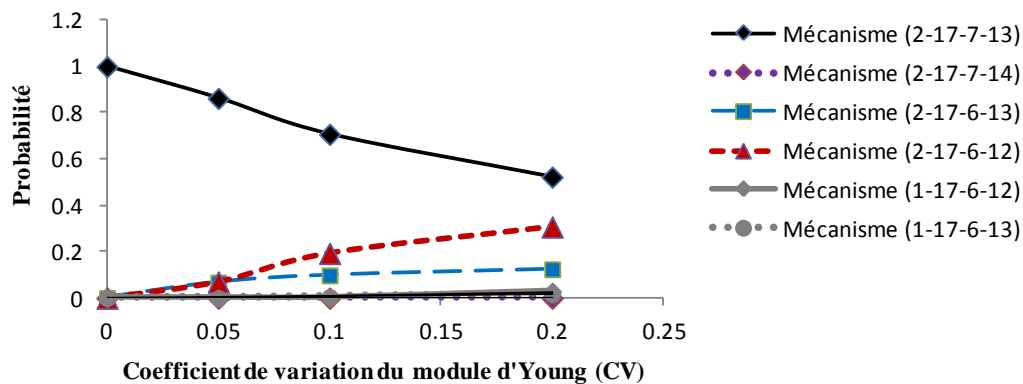
#### 4.1. Analyse des résultats

L'analyse que nous allons développer dans ce paragraphe concerne le cas d'un chargement appliqué à gauche de la clé de voûte. La méthodologie est la même pour le cas de chargement appliqué à droite de la clé de voûte et conduit aux mêmes résultats. En règle générale, la position d'apparition d'une rotule est conditionnée par celles des précédentes. Sur les 10000 combinaisons de valeurs aléatoires du module d'Young affectées aux différents voussoirs pour chacune des valeurs du coefficient de variation, trois mécanismes sont observés dans le premier cas ( $CV = 5\%$ ), cinq dans le deuxième ( $CV = 10\%$ ) et six mécanismes dans le troisième cas ( $CV = 20\%$ ).

La probabilité d'occurrence obtenue pour chacun favorise le même mécanisme (2-17-7-13) (rotules formées aux niveaux des joints : 2, 17, 7 et 13 par ordre d'apparition) mais avec des valeurs qui diminuent avec l'augmentation du coefficient de variation du module d'Young des voussoirs laissant apparaître d'autres mécanismes dont la densité cette fois augmente avec l'augmentation du CV. Les tracés en rouge discontinu



(Fig. 5, 6 et 7) représentent les chemins qui relient les positions des rotules ayant la plus forte probabilité pour chacune des valeurs du CV, appelés les chemins critiques. On remarque que la densité de la position d'apparition de la quatrième rotule est égale à la probabilité d'occurrence du mécanisme dont cette rotule fait partie.



**Figure 8.** Probabilité d'occurrence des mécanismes en fonction du coefficient de variation.

La Fig. 8 montre nettement la variation de la probabilité des différents mécanismes constatés en fonction du coefficient de variation du module des différents voussoirs. Cela signifie que si une variation importante du module d'Young des voussoirs est avérée, sa prise en compte dans les calculs est impérative, que ce soit pour la détermination de la capacité portante de la voûte ou pour prédire son mécanisme de ruine. Le tableau 4 récapitule l'ensemble des mécanismes constatés pour chacune des valeurs du CV considérées ainsi que leur probabilité d'occurrence.

**Tableau 4.** Probabilité d'occurrences des mécanismes observés.

CV	Probabilité d'occurrence des mécanismes observés					
	2-17-7-13	2-17-6-12	2-17-6-13	1-17-6-12	1-17-6-13	2-17-7-14
0%	100%	0%	0%	0%	0%	0%
5%	86,31%	6,96%	6,73%	0%	0%	0%
10%	70,77%	19,34%	9,83%	0,1%	0,5%	0%
20%	52,29%	30,75%	12,47%	2,89%	1,59%	0,1%

## 5. Conclusions

Une méthodologie d'évaluation probabiliste de la capacité portante et de prévision du mécanisme de ruine des voûtes maçonnées à l'état limite ultime a été présentée. Cette méthodologie a consisté en l'intégration de la variabilité naturelle du module d'Young des voussoirs de la voûte dans les calculs. Considérer le module comme étant une variable aléatoire a permis l'obtention de la fonction de répartition de la charge. Le calcul a été effectué pour trois valeurs du coefficient de variation (5, 10 et 20%).

Les résultats obtenus ont permis de proposer une relation reliant la capacité portante de la voûte à la variation des modules des différents voussoirs. Cette relation a permis d'identifier les voussoirs dont la chute du module contribuera le plus à la chute de la capacité portante i.e. les voussoirs sur lesquels aucun défaut n'est toléré ce qui a permis d'établir un ordre de priorité valable en phase d'inspection comme en phase de réparation et qui met en avant les naissances de la voûte, puis les reins et enfin la clé de voûte. Ce classement peut contribuer à l'optimisation des plannings des inspections et des réparations et par conséquent les dépenses budgétaires.

Les mécanismes de ruine sont identifiés dans les différents cas (déterministe, CV=5%, 10% et 20%) ainsi que leur probabilité d'occurrence. Les résultats montrent que le mécanisme observé dans le cas déterministe correspond à celui dont la probabilité d'occurrence est la plus forte et décroît en fonction du CV alors que le nombre des autres mécanismes ainsi que leurs probabilités d'occurrence augmentent en fonction du coefficient de variation du module d'Young. Cela signifie que si une variation importante du module d'Young des voussoirs est avérée, sa prise en compte dans les calculs deviendrait impérative, que ce soit pour la détermination de la capacité portante de la voûte ou pour prédire son mécanisme de ruine.

## 6. Bibliographie

- [BIN 03] Binda, L., G. Baronio, C. Tiraboschi, and C. Tedeschi. 2003. "Experimental Research for the Choice of Adequate Materials for the Reconstruction of the Cathedral of Noto." *Construction and Building Materials*, The reconstruction of Noto and Dresden Cathedrals, 17 (8): 629–39. doi:10.1016/S0950-0618(03)00059-X.
- [BUH 89] BUHAN P., MANGIAVACCHI R., NOVA R., PELLEGRINI G., and SALENCON J. 1989. "Yield Design of Reinforced Earth Walls by a Homogenization Method." *J Geotechnique* 39 (2): 189–201.
- [CAS 11] Casas, Joan R. 2011. "Reliability-Based Assessment of Masonry Arch Bridges." *Construction and Building Materials* 25 (4): 1621–31. doi:10.1016/j.conbuildmat.2010.10.011.
- [CAV 07] Cavicchi, Andrea, and Luigi Gambarotta. 2007. "Lower Bound Limit Analysis of Masonry Bridges Including Arch–fill Interaction." *Engineering Structures* 29 (11): 3002–14. doi:10.1016/j.engstruct.2007.01.028.
- [CHR 63] Christchurch. 1963. "MEXE. Military Engineering Experimental Establishment". «Military load classification of civil bridges by reconnaissance and correlation methods».
- [CLU 04] Cluni, Federico, and Vittorio Gusella. 2004. "Homogenization of Non-Periodic Masonry Structures." *International Journal of Solids and Structures* 41 (7): 1911–23. doi:10.1016/j.ijsolstr.2003.11.011.
- [COR 79] Corte, J. F. 1979. "A PROPOS DE LA METHODE DU MODULE DE REACTION POUR LE CALCUL DES SOUTÈNEMENTS." *BULL LIAISON LAB PONTS CHAUSS*, no. 104 (November). <http://trid.trb.org/view.aspx?id=1047072>.
- [De BUH 97] De Buhan, Patrick, and Gianmarco de Felice. 1997. "A Homogenization Approach to the Ultimate Strength of Brick Masonry." *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 45 (7): 1085–1104. doi:10.1016/S0022-5096(97)00002-1.
- [DRO 06] Drosopoulos, G. A., G. E. Stavroulakis, and C. V. Massalas. 2006. "Limit Analysis of a Single Span Masonry Bridge with Unilateral Frictional Contact Interfaces." *Engineering Structures* 28 (13): 1864–73. doi:10.1016/j.engstruct.2006.03.016.
- [FAN 01] Fanning, Paul J., and Thomas E Boothby. 2001. "Three-Dimensional Modelling and Full-Scale Testing of Stone Arch Bridges." *Computers & Structures* 79 (29–30): 2645–62. doi:10.1016/S0045-7949(01)00109-2.
- [GUS 06] Gusella, and Cluni. 2006. "Random Field and Homogenization for Masonry with Nonperiodic Microstructure." *Journal of Mechanics of Materials and Structures* 1 (2): 357e386.
- [HAR 07] Harvey. 2007. "Rule of Thumb Method for the Assessment of Arches". Rapport UIC, draft, 2007, pp. 22.
- [HAR 88] Harvey WEJ. 1988. "Application of the Mechanism Analysis to Masonry Arches." *Struct Eng* 1988; 66 (5): 77–84.
- [HUE 90] Huet, C. 1990. "Application of Variational Concepts to Size Effects in Elastic Heterogeneous Bodies." *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 38 (6): 813–41. doi:10.1016/0022-5096(90)90041-2.
- [KOO 53] Kooharian. 1953. "Limit Analysis of Voussoir (Segmental) and Concrete Arches." *Journal of the American Concrete Institute* 317-328, V. 24, N° 4, Dec. 1952, *Proceedings* V. 49.
- [LUC 97] Luciano, Raimondo, and Elio Sacco. 1997. "Homogenization Technique and Damage Model for Old Masonry Material." *International Journal of Solids and Structures* 34 (24): 3191–3208. doi:10.1016/S0020-7683(96)00167-9.
- [MIL 08] Milani, Enrico, Gabriele Milani, and Antonio Tralli. 2008. "Limit Analysis of Masonry Vaults by Means of Curved Shell Finite Elements and Homogenization." *International Journal of Solids and Structures* 45 (20): 5258–88. doi:10.1016/j.ijsolstr.2008.05.019.
- [MIL 12] Milani, Gabriele, and Paulo B. Lourenço. 2012. "3D Non-Linear Behavior of Masonry Arch Bridges." *Computers & Structures* 110–111 (November): 133–50. doi:10.1016/j.compstruc.2012.07.008.
- [MIS 07] Mistler, M., A. Anthoine, and C. Butenweg. 2007. "In-Plane and out-of-Plane Homogenisation of Masonry." *Computers & Structures*, Computational Structures Technology, 85 (17–18): 1321–30. doi:10.1016/j.compstruc.2006.08.087.
- [NG 02] Ng, K. -H, and C. A Fairfield. 2002. "Monte Carlo Simulation for Arch Bridge Assessment." *Construction and Building Materials* 16 (5): 271–80. doi:10.1016/S0950-0618(02)00020-X.
- [ORB 08] ORBAN, Z. 2008. "Improving Assessment, Optimisation of Maintenance and Development of Database for Masonry Arch Bridges". International Union of Railways, UIC infrastructure Department, 13 p., 2008.
- [PEG 97] Pegon, P., and A. Anthoine. 1997. "Numerical Strategies for Solving Continuum Damage Problems with Softening: Application to the Homogenization of Masonry." *Computers & Structures*, Computational Structures Technology, 64 (1–4): 623–42. doi:10.1016/S0045-7949(96)00153-8.
- [PIP 51] PIPPARD A. J. S. 1951. "A Study of the Voussoir Arch." *His Majesty's Stationery Office, National Building Studies, Research Paper n°11, 52p.*
- [REC 14] Reccia, E., G. Milani, A. Cecchi, and A. Tralli. 2014. "Full 3D Homogenization Approach to Investigate the Behavior of Masonry Arch Bridges: The Venice Trans-Lagoon Railway Bridge." *Construction and Building Materials* 66 (September): 567–86. doi:10.1016/j.conbuildmat.2014.05.096.
- [ROS 98] Rosson, Barry T., Ketil Søyland, and Thomas E. Boothby. 1998. "Inelastic Behavior of Sand-Lime Mortar Joint Masonry Arches." *Engineering Structures* 20 (1–2): 14–24. doi:10.1016/S0141-0296(97)00052-7.

- [TOT 09] Tóth, Axel Roland, Zoltán Orbán, and Katalin Bagi. 2009. “Discrete Element Analysis of a Stone Masonry Arch.” *Mechanics Research Communications* 36 (4): 469–80. doi:10.1016/j.mechrescom.2009.01.001.
- [TRA 1871] TRAUTWINE, J. C. 1871. *Civil Engineer's Pocket-Book*. New York Wiley publisher, 1871, 770 p.
- [ZUC 02] Zucchini, A, and P. B Lourenço. 2002. “A Micro-Mechanical Model for the Homogenisation of Masonry.” *International Journal of Solids and Structures* 39 (12): 3233–55. doi:10.1016/S0020-7683(02)00230-5.
- [ZUC 09] Zucchini, A., and P. B. Lourenço. 2009. “A Micro-Mechanical Homogenisation Model for Masonry: Application to Shear Walls.” *International Journal of Solids and Structures* 46 (3–4): 871–86. doi:10.1016/j.ijsolstr.2008.09.034.