
Modèle incrémental à pas de temps fini pour la simulation du comportement hydromécanique du bois

Sung-Lam Nguyen^{1,2}, Jean-François Destrebecq^{1,2}

¹ Clermont Université, Université Blaise Pascal, BP 10448, 63000, Clermont-Ferrand, France

² CNRS, UMR 6602, Institut Pascal, F-63171, Aubière, France

Sung-lam.nguyen@ifma.fr

RÉSUMÉ. Ce travail est consacré à développer un modèle 3D orthotrope à pas de temps fini pour simuler le comportement hydromécanique du bois. Dans ce modèle, l'effet hygroverrou, i.e. un blocage temporaire de la déformation au cours d'une phase de séchage sous contrainte, représente l'effet mécanosorptif qui traduit une interaction complexe entre chargement mécanique et variations d'humidité. A partir de résultats expérimentaux dans la littérature, une évolution de la déformation hygroverrou a été proposée. Cette déformation est supposée exister dans la seule direction longitudinale. Egalement, une formulation incrémentale est développée pour modéliser la déformation viscoélastique à humidité variable. Finalement, le couplage entre ces deux parties et la déformation de retrait/gonflement mène à un nouveau modèle incrémental du comportement hydromécanique du bois. Il est à noter que le pas de temps pour la simulation numérique est fini, mais pas nécessairement petit. Cette propriété réduit de manière importante l'effort de calcul tout en préservant une bonne précision. Le modèle est finalement utilisé pour simuler l'effet de variations d'humidité sur l'évolution de la flèche d'une poutre.

ABSTRACT. This work has devoted to develop a 3D orthotropic model with a finite time step for simulating the hydro-mechanical behavior of wood. In this model, hydro-lock effect, i.e. a temporary locking of the mechanical strain upon drying under stress, represents the mechano-sorptive effect which corresponds to a complex interaction between mechanical loading and moisture content changes. Based on test results in literature, an evolution law is proposed for the hydro-lock strain. This strain is assumed to occur in the longitudinal direction only. Beside, a 3D incremental formula is also developed to depict the viscoelastic strain at variable humidity. Finally, the coupling of these two parts leads to a new 3D incremental model for hydro-mechanical behavior of wood. It must be noted that the time step to be used for numerical simulations must be finite, but not necessarily small. This feature significantly reduces the computational effort while maintaining good accuracy. Finally, the model is used to simulate the effect of varying humidity on the deflection evolution of a wood beam.

MOTS-CLÉS : bois, effet mécanosorptif, effet hygroverrou, viscoélasticité, formulation incrémentale.

KEY WORDS : wood, mechano-sorptive effect, hydro-lock effect, viscoelasticity, incremental form.

1. Introduction

Le bois, un composite naturel, est couramment utilisé en génie civil du fait de ses qualités : résistant, écologique, économique, durable.... Cependant, ce matériau présente un comportement hydromécanique complexe qui résulte de sa forte sensibilité aux variations d'humidité ambiante. Les variations d'humidité peuvent provoquer la rupture d'une structure en bois en même au niveau faible du chargement [HEA 64]. Cette sensibilité réside, non seulement dans la dépendance des ses propriétés (module Young, coefficient de retrait/gonflement, etc.) à la teneur en eau, mais elle également présente dans l'effet mécanosorptif, i.e. une interaction complexe entre chargement mécanique et variations d'humidité.

Ce couplage a déjà fait l'objet de nombreux travaux sur des aspects de modélisation et d'expérimentation. Une des approches pour modéliser le comportement mécanosorptif repose sur l'hypothèse de l'existence d'un «effet hygroverrou» [GRI 88], [DUB 05], [HUS 10], [SAI 14]. Cet effet a été initialement décrit par Gril [GRI 88] à partir d'observations expérimentales. Il se traduit par un phénomène de blocage temporaire de la déformation en phase de séchage sous contrainte. Cette déformation bloquée peut ensuite être récupérée lors d'une phase d'humidification. L'effet hygroverrou a été formalisé par Dubois *et al.* [DUB 05] qui ont proposé de modéliser ce comportement par la loi de Hooke en phase d'humidification et par la loi de Hooke restreinte en phase de séchage. Cette approche a conduit à un difficile problème de synchronisation qui a finalement été résolu par Husson *et al.* [HUS 10] avec l'introduction d'un « ressort hygroverrou ». Dans ce dernier modèle, le blocage de la déformation en phase de séchage sous contrainte est assuré par l'introduction d'une « contrainte mécanosorptive ». Cette contrainte, qui s'ajoute à la contrainte élastique, conduit à une relation proportionnelle entre la contrainte totale et la rigidité en phase de séchage. Il est à noter que les modèles ci-dessus reposent sur l'hypothèse de l'existence d'un effet hygroverrou sans réelle justification expérimentale jusqu'aux travaux de Saifouni [SAI 14].

A partir d'un essai mécanosorptif spécifique, Saifouni a démontré l'existence de la déformation hygroverrou avec les caractéristiques suivantes : (i) la déformation hygroverrou est créée et se développe de manière instantanée pour chaque incrément d'humidité relative dans la phase de séchage sous contrainte constante ; (ii) une variation de contrainte à humidité constante n'entraîne pas de modification de la déformation hygroverrou. Autrement dit, la déformation hygroverrou peut être considérée comme indépendante du temps et des variations de contrainte à humidité constante ; (iii) la déformation hygroverrou (lorsqu'elle existe) décroît en valeur absolue, jusqu'à s'annuler lorsque la teneur en eau revient à sa valeur initiale au début de la phase de séchage sous contrainte. Ces trois indications importantes respectent les principes généraux qui gouvernent le comportement mécanosorptif. Ils serviront de base dans la suite pour la construction d'un nouveau modèle.

Il est à noter que les modèles cités plus haut ne permettent pas de décrire la recouvrance de la déformation en phase d'humidification en l'absence de chargement mécanique. De plus, bien que ces modèles se présentent sous une forme incrémentale, ils nécessitent de mémoriser l'intégralité de l'histoire de l'état de contrainte et des variations d'humidité en chaque point du solide, ce qui rend la procédure de résolution numérique très complexe et beaucoup trop lourde pour pouvoir être appliquée à des problèmes réels.

Dans ce contexte, le présent travail propose une nouvelle approche pour rendre compte de l'effet hygroverrou. L'approche est basée sur les résultats expérimentaux de Saifouni qui ont permis de vérifier l'existence d'une déformation hygroverrou à l'origine de l'effet de blocage observé en phase de séchage sous contrainte. Dans un premier temps, l'évolution de la déformation hygroverrou est décrite à partir des trois indications ci-dessus. En parallèle, une formulation 3D est construite pour modéliser la déformation viscoélastique à humidité variable tenant en compte de l'orthotropie du comportement. Le couplage entre ces deux parties conduit à un nouveau modèle hydromécanique du bois. Dans second temps, ce modèle est mis sous une forme incrémentale à pas de temps fini qui permet de s'affranchir du problème de mémoire. A titre d'exemple, le modèle construit est finalement utilisé pour simuler l'évolution de la flèche d'une poutre fléchie sous charge et humidité variables.

2. Développement du modèle analytique

Cette partie expose les développements du modèle analytique sur la base des conclusions de l'essai mécanosorptif de Saifouni. L'essai a permis de valider l'hypothèse de partition de la déformation. En se basant sur cette hypothèse, l'évolution de la déformation totale s'écrit comme suit

$$\dot{\hat{\epsilon}}_t = \dot{\hat{\epsilon}}_e + \dot{\hat{\epsilon}}_{HL} + \dot{\hat{\epsilon}}_{ve} + \dot{\hat{\epsilon}}_w \quad [1]$$

où ε_e , ε_{HL} , ε_{ve} et ε_w sont respectivement les parties élastique, hygroverrou, viscoélastique et hydrique de la déformation totale ε_t . L'équation [1] peut être représentée par le modèle analogique donné à la figure 1. La partie viscoélastique est schématisée par un modèle hybride ; associé au ressort, ceci est équivalent à un modèle de Kelvin généralisé en fluage, ou de Maxwell généralisé en relaxation.

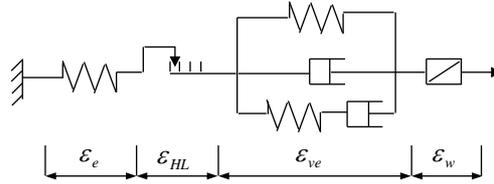


Figure 1. Modèle analogique utilisé pour la modélisation : ε_e déformation élastique, ε_{HL} déformation hygroverrou, ε_{ve} déformation viscoélastique pure, ε_w déformation hydrique.

Les expressions de ces 4 parties de la déformation totale vont être établies dans la suite.

2.1 Déformation libre et déformation élastique

La déformation hydrique (ou déformation libre) s'écrit simplement comme suit

$$\{\dot{\varepsilon}_w\} = [\alpha] \dot{w} \quad [2]$$

où $[\alpha] = [\alpha_L \ \alpha_R \ \alpha_T \ 0 \ 0 \ 0]^T$ est une matrice formée des coefficients de retrait/gonflement, considérés constants.

La déformation élastique est donnée par la loi de Hooke, fonction de la teneur en eau. Soit

$$\dot{\varepsilon}_e = \dot{\varepsilon}_e^\sigma + \dot{\varepsilon}_e^w = \dot{\sigma} / E(w) + (-E'(w)\dot{w}\sigma / E^2(w)) \quad [3]$$

où $\dot{\varepsilon}_e^\sigma = \dot{\sigma}/E(w)$ est la variation de la déformation élastique due à la variation de la contrainte $\dot{\sigma}$ et $\dot{\varepsilon}_e^w$ est la variation de la déformation élastique due à la variation du module causée par la variation de la teneur en eau.

2.2 Déformation hygroverrou

L'expression de la déformation hygroverrou doit être déterminée dans le respect des observations expérimentales ci-dessus. Pour cela, elle est différente en phases de séchage et d'humidification.

2.2.1 Déformation hygroverrou en phase de séchage

En phase de séchage sous contrainte, la déformation hygroverrou apparaît comme le résultat de l'effet de blocage de la déformation élastique. C'est-à-dire que

$$\forall \dot{w} < 0 \quad (\dot{\varepsilon}_e + \dot{\varepsilon}_{HL})_{\dot{\sigma}=0} = (\dot{\varepsilon}_e^\sigma + \dot{\varepsilon}_e^w + \dot{\varepsilon}_{HL})_{\dot{\sigma}=0} = 0 \quad [4]$$

D'où il vient

$$\dot{\varepsilon}_{HL}|_{\dot{w}<0} = -\dot{\varepsilon}_e^w = E'(w)\dot{w}\sigma / E^2(w) \quad [5]$$

où $\dot{\varepsilon}_{HL}|_{\dot{w}<0}$ est l'évolution de la déformation hygroverrou dans la phase de séchage. L'équation [5] montre que le phénomène de blocage de la déformation au cours du séchage est dû à la déformation hygroverrou qui évolue de manière à compenser l'évolution $\dot{\varepsilon}_e^w$ de la partie de la déformation élastique due à la rigidification du module élastique en phase de séchage. Cette équation montre également que la déformation hygroverrou n'évolue pas ($\dot{\varepsilon}_{HL} = 0$) lorsque l'humidité est constante ($\dot{w} = 0$), quelque soit la contrainte mécanique σ . Cette propriété est en accord avec les observations expérimentales (indication (ii) dans la section 1).

2.2.2 Déformation hygroverrou en phase d'humidification

Les essais ont montré que la déformation hygroverrou (si elle existe) décroît en phase d'humidification, jusqu'à s'annuler lorsque la teneur en eau w revient à sa valeur initiale \bar{w} au début de la phase de séchage sous contrainte (indication (iii) dans la section 1). Cette indication ne suffit pas pour exprimer la déformation hygroverrou en phase d'humidification. Une possibilité consiste à admettre que son évolution suit une loi analogue à celle décrite par l'équation [5]. Mais on observe que cette équation ne permet pas de récupérer la déformation hygroverrou en cas de contrainte nulle ou insuffisante. Comme mentionné plus haut, cette difficulté avait déjà été rencontrée par d'autres auteurs [HUS 10] et [SAI 14]. Pour surmonter cette difficulté, on remplace ici la contrainte mécanique σ dans l'équation [5] par une contrainte fictive $\tilde{\sigma}$ à déterminer. Ce qui conduit à

$$\dot{\varepsilon}_{HL}|_{\dot{w}>0} = E'(w)\dot{w}\tilde{\sigma} / E^2(w) \quad [6]$$

où $\dot{\varepsilon}_{HL}|_{\dot{w}>0}$ est l'évolution de la déformation hygroverrou en phase d'humidification. Pour satisfaire l'indication (iii) rappelée ci-dessus, la déformation hygroverrou doit s'annuler lorsque $w = \bar{w}$. La valeur actuelle de la contrainte fictive $\tilde{\sigma}$ est donc obtenue en intégrant l'équation [6] sur l'intervalle $[w, \bar{w}]$ avec la condition limite $\varepsilon_{HL}(\bar{w}) = 0$, ce qui donne

$$\tilde{\sigma} = E(w)E(\bar{w})\varepsilon_{HL} / [E(w) - E(\bar{w})] \quad [7]$$

Finalement, compte tenu des équations (5) à (7), la loi d'évolution de la déformation hygroverrou peut être résumée comme suit

$$\dot{\varepsilon}_{HL} = E'(w)\dot{w}\tilde{\sigma} / E^2(w) \text{ avec } \begin{cases} \dot{w} < 0 : \tilde{\sigma} = \sigma \\ \dot{w} > 0 : \tilde{\sigma} = \zeta(w)\varepsilon_{HL} \end{cases} \quad [8]$$

où $\zeta(w) = E(w)E(\bar{w})/[E(w) - E(\bar{w})]$. En phase d'humidification, $\tilde{\sigma}$ est donc une contrainte fictive dont la valeur actuelle dépend uniquement de la quantité de déformation hygroverrou accumulée à l'instant considéré. Sa valeur est donc toujours définie $\forall w \neq \bar{w}$; l'introduction de cette contrainte fictive permet donc de résoudre le problème de la récupération de la déformation hygroverrou en phase d'humidification, quelque soit le niveau de chargement. On remarque en outre qu'il n'a pas été nécessaire de préciser la signification physique de la contrainte fictive pour établir les équations précédentes.

2.3 Déformation viscoélastique

Le modèle hybride utilisé pour la partie viscoélastique du modèle analogique (Figure 1) représente un comportement viscoélastique pur (i.e. sans élasticité instantanée). L'effet hygroverrou influence donc uniquement la partie élastique instantanée qui se trouve ainsi indépendante du temps (indication (ii) dans la section 1). Cette partie viscoélastique avec le ressort à l'extérieur est équivalente à un modèle de Maxwell généralisé à 2 branches. En conséquence, les formulations des parts élastique et viscoélastique de la déformation vont être associées dans l'équation de Boltzmann en relaxation. La fonction de relaxation est approchée par une série de Dirichlet dont les coefficients sont des fonctions linéaires de la teneur en eau, comme suit

$$r(t, t_0, w) = \sum_{\mu=0}^r \gamma_{\mu}(w) e^{-\beta_{\mu}(t-t_0)} \quad [9]$$

où β_{μ} sont des constantes fixées; $w = w(t)$ est la teneur en eau à l'instant t . Il est à noter que la forme linéaire des coefficients $\gamma_{\mu}(w) = a_{\mu} + b_{\mu}w$ permet de représenter la dépendance de la fonction de relaxation vis-à-vis du taux d'humidité. Les valeurs des paramètres a_{μ}, b_{μ} sont déterminées par la méthode des moindres carrés à partir d'essais en relaxation à différents niveaux d'humidité [SAI 14].

Pour un matériau orthotrope en général, la matrice de relaxation viscoélastique $[R(t, t_0, w)]$ contient 9 fonctions qui dépendent de l'instant de chargement t_0 , de l'instant actuel t et du niveau de la teneur en eau w . Ce nombre se réduit à 6 dans le cas où les coefficients de Poisson sont constants. Mais, en partant des résultats expérimentaux [CAR 87], on trouve que cette matrice dépend uniquement de deux fonctions, une pour les termes de cisaillement et une pour les autres termes. D'où, on peut écrire

$$[R(t, t_0, w)] = [\rho(t, t_0, w)][A(w)] \quad [10]$$

où $[A(w)]$ est la matrice de rigidité élastique qui dépend de la teneur en eau à l'instant t . $[\rho(t, t_0, w)] = [\gamma_0(w)] + \sum_{\mu=1}^r [\gamma_{\mu}(w)][\exp_{\mu}(t, t_0)]$ est une matrice diagonale formée des 2 fonctions de relaxation représentées par des séries de Dirichlet (voir l'équation [9]) avec la condition $\sum_{\mu=0}^r [\gamma_{\mu}(w)] = [1] \forall w$. D'où,

$$[\gamma_{\mu}(w)] = \begin{bmatrix} \gamma_{\mu}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_{\mu}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_{\mu}^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_{\mu}^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_{\mu}^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_{\mu}^{(2)} \end{bmatrix} \quad [11]$$

avec $\gamma_{\mu}^{(i)} = \gamma_{\mu}^{(i)}(w)$ et $[\exp_{\mu}(t, t_0)] = e^{-\beta_{\mu}(t-t_0)}[1]$. Cette écriture signifie que les trois termes de cisaillement de la matrice viscoélastique évoluent proportionnellement à la deuxième fonction adimensionnelle, les neuf autres termes évoluent proportionnellement à la première fonction. Il est souligné que nous notons $[\cdot]$ une matrice carrée et $\{\cdot\}$ un vecteur, respectivement. Il est à noter que le comportement viscoélastique peut être formulé indifféremment en fluage ou en relaxation. De ce point de vue, la matrice $[R(t, t_0, w)]$ définie par l'équation [10] suffit pour décrire le comportement viscoélastique à humidité variable quelque soit le mode de sollicitation.

3. Mise en forme incrémentale du modèle analytique

L'objectif est d'exprimer le modèle analytique sous une forme incrémentale à pas de temps fini, ce qui est une bonne approche pour résoudre un problème dépendant du temps sans avoir à mémoriser toute l'histoire de la contrainte et de la déformation. Compte tenu de l'hypothèse de partition de la déformation, ceci revient à intégrer chaque terme de l'équation [1] séparément, puis à faire la somme des incréments ainsi obtenus

$$\forall t, t + \Delta t \quad \{\Delta \varepsilon_t\} = \{\Delta \varepsilon_e\} + \{\Delta \varepsilon_{HL}\} + \{\Delta \varepsilon_{ve}\} + \{\Delta \varepsilon_w\} \quad [12]$$

Chaque terme de cette équation est explicité ci-dessous. Pour simplifier l'écriture, on note $\sigma = \sigma(t)$ et $E = E(t)$ les valeurs prises par la contrainte mécanique et le module d'élasticité au début de l'intervalle de temps fini $[t, t + \Delta t]$, respectivement. On note également $\Delta \sigma = \sigma(t + \Delta t) - \sigma(t)$, $\Delta E = E(t + \Delta t) - E(t)$ et $\Delta w = w(t + \Delta t) - w(t)$ les variations de la contrainte, du module d'élasticité et de la teneur en eau durant l'incrément de temps Δt , respectivement.

3.1 Forme incrémentale de la déformation hydrique

Dans l'hypothèse où les coefficients de retrait/gonflement sont constants, l'incrément $\{\Delta \varepsilon_w\}$ de la déformation hydrique s'écrit facilement

$$\{\Delta \varepsilon_w\} = [\alpha] \Delta w \quad [13]$$

3.2 Forme incrémentale de la déformation hygroverrou

Cette partie est traitée séparément pour les deux phases de séchage et d'humidification avec les notations suivantes : $\varepsilon_{HL} = \varepsilon_{HL}(t)$, $\Delta \varepsilon_{HL} = \varepsilon_{HL}(t + \Delta t) - \varepsilon_{HL}(t)$ et $\bar{E} = E(\bar{w})$. Rappelons que l'effet hygroverrou existe uniquement dans la direction longitudinale. Donc, le module d'Young dans cette section est celui de la direction longitudinale. Pour simplifier l'écriture, on note $[1]$ et $\{1\}$ une matrice 6x6 et un vecteur colonne 6x1 respectivement, avec la valeur 1 à la position de la direction longitudinale et la valeur 0 pour les autres termes.

- phase de séchage :

Comme mentionné à la section 2.2.1, la variation de la déformation hygroverrou compense l'évolution de la partie $\dot{\varepsilon}_e^w$ de la déformation élastique due à la rigidification du module élastique en phase de séchage (équation [5]). L'incrément de cette déformation est donc obtenu par intégration de l'équation [5] sur l'intervalle de temps $[t, t + \Delta t]$. Ce qui conduit à

$$\{\Delta \varepsilon_{HL}\} = k_s \{1\} \quad [14]$$

où

$$k_s = \frac{\Delta E}{2(E + \Delta E)^2} \Delta \sigma_L + \frac{\sigma_L \Delta E}{2} \left(\frac{1}{E^2} + \frac{1}{(E + \Delta E)^2} \right) \quad [15]$$

σ_L et $\Delta \sigma_L$ sont la contrainte dans la direction longitudinale et son incrément.

- phase d'humidification :

Dans ce cas, l'incrément de la déformation hygroverrou est obtenu par intégration de $\dot{\varepsilon}_{HL}|_{w>0}$ dans l'équation [6]. En portant l'équation [7] dans l'équation [6], puis en résolvant l'équation différentielle du premier l'ordre, on obtient

$$\{\Delta \varepsilon_{HL}\} = \frac{\Delta E \bar{E}}{(E - \bar{E})(E + \Delta E)} \{\varepsilon_{HL}\} \quad [16]$$

Finalement, la combinaison des équations [14] à [16] donne la forme incrémentale complète de la déformation hygroverrou

$$\{\Delta \varepsilon_{HL}\} = [\eta_{HL}] \{\Delta \sigma\} + \{\xi_{HL}\} \quad [17]$$

où

$$si \ \dot{w} < 0 \begin{cases} [\eta_{HL}] = \frac{\Delta E}{2(E + \Delta E)^2} [1] \\ \{\xi_{HL}\} = \frac{\sigma_L \Delta E}{2} \left(\frac{1}{E^2} + \frac{1}{(E + \Delta E)^2} \right) \{1\} \end{cases} \quad si \ \dot{w} > 0 \begin{cases} [\eta_{HL}] = [0] \\ \{\xi_{HL}\} = \frac{\Delta E \bar{E}}{(E - \bar{E})(E + \Delta E)} \{\varepsilon_{HL}\} \end{cases} \quad [18]$$

3.3 Forme incrémentale de la déformation élasto-viscoélastique

La somme des déformations élastique et viscoélastique est donnée par l'équation de Boltzmann en relaxation

$$\{\sigma(t)\} = \int_0^t [R(t, \tau, w)] \{\dot{\varepsilon}_{eve}(\tau)\} d\tau \quad [19]$$

où $\{\varepsilon_{eve}\} = \{\varepsilon_e\} + \{\varepsilon_{ve}\}$ est la déformation élasto-viscoélastique. En tenant compte des équations [10] et [11], on peut écrire

$$\{\sigma(t)\} = \int_0^t [A(w)] [\gamma_0(w)] \{\dot{\varepsilon}_{eve}(\tau)\} d\tau + \sum_{\mu=1}^r \int_0^t [A(w)] [\gamma_\mu(w)] \exp(t - \tau) \{\dot{\varepsilon}_{eve}(\tau)\} d\tau \quad [20]$$

L'incrément de la contrainte est défini comme $\{\Delta \sigma\} = \{\sigma(t + \Delta t)\} - \{\sigma(t)\}$. Donc, après arrangement de l'équation [20] nous avons

$$\{\Delta \varepsilon_{eve}\} = [\eta_{eve}] \{\Delta \sigma\} + \{\xi_{eve}\} \quad [21]$$

où $[\eta_{eve}] = [C(w + \Delta w)] [\Gamma(w + \Delta w)]^{-1}$ avec

$$[\Gamma(w + \Delta w)] = \begin{bmatrix} \Gamma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Gamma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Gamma_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Gamma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Gamma_2 \end{bmatrix} \quad où \begin{cases} \Gamma_1 = \gamma_0^{(1)}(w + \Delta w) + \sum_{\mu=1}^r \gamma_\mu^{(1)}(w + \Delta w) \frac{1 - e^{-\beta_\mu^{(1)} \Delta t}}{\beta_\mu^{(1)} \Delta t} \\ \Gamma_2 = \gamma_0^{(2)}(w + \Delta w) + \sum_{\mu=1}^r \gamma_\mu^{(2)}(w + \Delta w) \frac{1 - e^{-\beta_\mu^{(2)} \Delta t}}{\beta_\mu^{(2)} \Delta t} \end{cases} \quad [22]$$

et $\{\xi_{eve}\} = \sum_{\mu=0}^r \{\xi_{eve}\}_\mu$ avec

$$\begin{cases} \mu = 0 : \{\xi_{eve}\}_0 = \left[[C(w + \Delta w)] - [C(w)] \left[\frac{\gamma_0(w + \Delta w)}{\gamma_0(w)} \right] \right] \times [\Gamma(w + \Delta w)]^{-1} \{\sigma_0(t)\} \\ \mu = 1 \div r : \{\xi_{eve}\}_\mu = \left[[C(w + \Delta w)] - [C(w)] \left[\frac{\gamma_\mu(w + \Delta w)}{\gamma_\mu(w)} \right] \exp(\Delta t) \right] \times [\Gamma(w + \Delta w)]^{-1} \{\sigma_\mu(t)\} \end{cases} \quad [23]$$

3.4 Forme incrémentale du modèle global

Finalement, la loi de comportement sous la forme incrémentale du modèle complet est obtenue par la somme des équations [13], [17] et [21]

$$\{\Delta \varepsilon\} = [\eta] \{\Delta \sigma\} + \{\xi\} \quad [24]$$

où

$$\begin{cases} [\eta] = [\eta_{HL}] + [\eta_{eve}] \\ \{\xi\} = \{\xi_{HL}\} + \{\xi_{eve}\} + \{\Delta \varepsilon_w\} \end{cases} \quad [25]$$

La forme de l'équation [24] est similaire au cas d'un comportement thermoélastique. Cette propriété est mise à profit pour la mise en œuvre numérique du modèle, en simulant un problème thermoélastique linéaire équivalent, où η est une complaisance fictive et ξ est un chargement thermique équivalent. Il doit être souligné

que l'équation [24] résulte d'intégrales exactes, la seule approximation concernant les évolutions de $E(w)$ et $\varepsilon(t)$ considérées comme linéaires sur l'intervalle de temps $[t, t + \Delta t]$. Il en résulte que pour la mise en œuvre numérique du modèle, le pas de temps Δt est fini, mais non nécessairement petit. Cette propriété importante permet de réduire considérablement l'effort de calcul tout en préservant une bonne précision, ce qui peut s'avérer très profitable pour l'application du modèle pour la simulation de problèmes complexes.

4. Simulation numérique

4.1 Exemple 1 : essai de traction

Dans un but de validation, le modèle est d'abord appliqué à la simulation de l'essai mécanosorptif réalisé par Saifouni [SAI 14]. Il a fait un essai de traction longitudinale sur un échantillon de sapin blanc de dimensions $L \times R \times T = 50 \times 3 \times 1 \text{ mm}$, en faisant varier l'humidité relative et le chargement simultanément. La durée de chaque palier de chargement (σ et HR) est d'environ 2h avec un déphasage de 15' entre l'incrément de contrainte et l'incrément d'humidité relative (Figure 2a). La simulation numérique, basée sur le modèle résumé par l'équation [24], a été réalisée à l'aide du logiciel Matlab®. Compte tenu de la forme incrémentale du modèle, le calcul est effectué pas-à-pas pour toute la durée de l'essai. Le résultat de la simulation numérique est représenté sur la (Figure 2b) par la courbe discontinue.

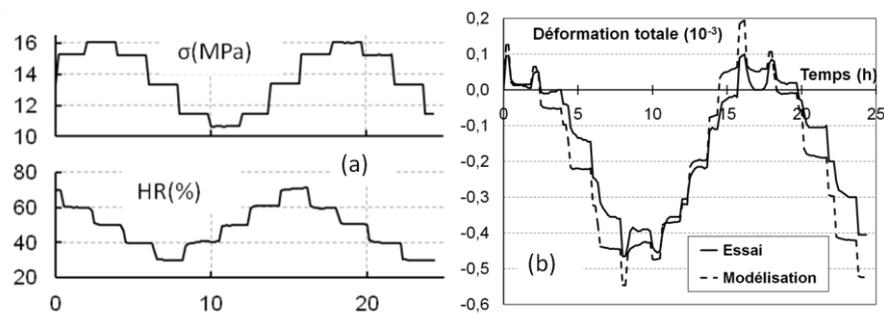


Figure 2. (a) : cycle imposé de contrainte et d'humidité relative. (b) : comparaison entre résultat numérique du modèle et résultats expérimentaux de Saifouni [SAI 14].

La similitude entre la déformation totale calculée et la déformation totale expérimentale montre que les principaux aspects du comportement sont correctement décrits par le modèle. A noter que l'effet de diffusion n'est pas pris en compte dans ce calcul (l'équilibre hydrique est supposé stable à chaque instant).

4.2 Exemple 2 : poutre en flexion

Pour illustrer la capacité du modèle, il est appliqué à un exemple de poutre en flexion 4 points. Les calculs numériques sont effectués avec le code d'élément finis Cast3m. La teneur en eau varie en fonction du temps (Figure 3a), en supposant qu'elle reste homogène en tous points de la poutre. La flèche calculée à mi-portée de la poutre est présentée sur la Figure 3b pour différents cas d'humidité.

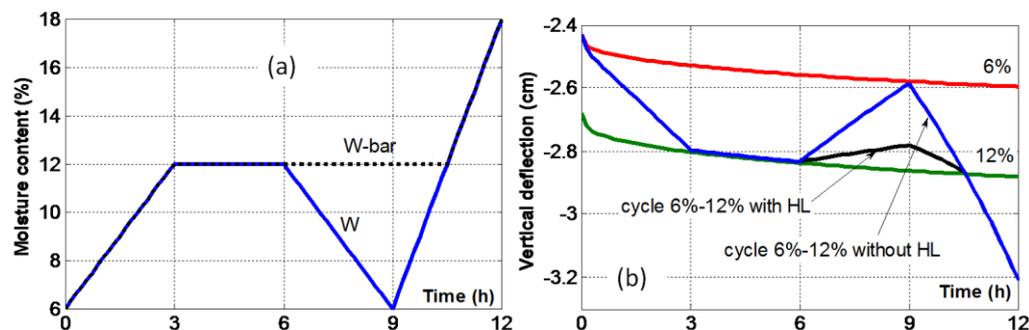


Figure 3. (a) : cycle imposé de teneur en eau. (b) : flèche de la poutre à mi-portée à humidité basse, haute et en cyclant entre les deux.

Les courbes rouge et verte correspondent respectivement à l'humidité constante de 6% et 12%. Les deux autres courbes correspondent au cas d'un cycle d'humidité (Figure 3a). La courbe noire présente un calcul classique sans l'effet hygroverrou qui diffère de la courbe bleu (avec hygroverrou) à partir de l'instant de début

de séchage (6h) jusqu'à l'instant 10.5h où la teneur en eau revient à sa valeur au début de séchage sous contrainte ($w = \bar{w}$). Dans cet intervalle, la déformation hygroverrou est créée entre 6h à 9h, puis elle diminue progressivement jusqu'à s'annuler après 10.5h. On voit que cette déformation hygroverrou influence clairement la réponse de la structure en bois du fait de l'interaction entre chargement mécanique et variations d'humidité. Ce résultat confirme le rôle important de l'effet hygroverrou dans le comportement hydromécanique du bois.

5. Conclusion

Dans ce travail l'effet hygroverrou, précédemment rapporté par certains auteurs, a été intégré dans un nouveau modèle 3D orthotrope de comportement du bois. Les principales propriétés du modèle sont listées ci-dessous :

- Une loi d'évolution est proposée pour la déformation hygroverrou en correspondance avec les observations expérimentales.
- Un couplage de la déformation hydrique, élastique, viscoélastique et hygroverrou est réalisé en se basant sur l'hypothèse de partition de la déformation.
- Le modèle analytique construit sur ces bases est mis sous une forme incrémentale à pas de temps fini par l'intégration exacte. Le pas de temps est donc fini, mais pas nécessairement petit.
- En profitant de sa forme incrémentale, le modèle est facilement implanté dans le code d'élément finis Cast3m comme un problème thermomécanique fictif équivalent. La bonne précision est obtenue pour un faible effort de calcul numérique.
- Les exemples de calcul réalisés avec ce modèle confirment clairement que le comportement hydromécanique du bois est fortement affecté par l'effet hygroverrou qui ne peut donc être omis dans la simulation des structures en bois sous chargement mécanique et ambiance variables.

6. Remerciements

Ce travail a été réalisé grâce au soutien de la Région Auvergne et du Fond européen de développement régional (FEDER) qui ont contribué financièrement à sa réalisation.

7. Bibliographie

- [HEA 64] HEARMON R.F.S, PATON J.M., « Moisture content changes and creep of wood », *Forest Products Journal*, 1964, p.357-359.
- [GRI 88] GRIL J., Une modélisation du comportement hygro-rhéologique du bois à partir de sa microstructure, Thèse de doctorat, Université de Paris 6, 1988.
- [DUB 05] DUBOIS F., RANDRIAMBOLOLONA H., PETIT C., « Creep in wood under variable climate conditions: numerical modeling and experimental validation », *Mechanics of Time-Dependent Materials*, vol. 9, 2005, p.137-202.
- [HUS 10] HUSSON J.M., DUBOIS F., SAUVAT N., « Elastic response in wood under moisture content variations: analytic development », *Mechanics of Time-Dependent Materials*, vol. 14, 2010, p. 203-217.
- [SAI 14] SAIFOUNI O., Modélisation des effets rhéologiques dans les matériaux: application au comportement mécanosorptif du bois. Thèse de doctorat, Université de Blaise Pascal, Clermont-Ferrand, 2014.
- [CAR 87] CARIOU J-L., Caractérisation d'un matériau viscoélastique anisotrope : le bois, Thèse de doctorat, Université de Bordeaux 1, 1987.