
Interaction sol – structure : déformation d’un radier sur un sol hétérogène en 3D

H. Niandou

Université de Bordeaux, CNRS UMR 5295, I2M, Génie Civil et Environnemental (GCE).

Avenue des facultés.

33405 Talence cedex, France.

halidou.niandou@u-bordeaux.fr

RÉSUMÉ: La variabilité spatiale des propriétés des sols a une influence majeure sur beaucoup de types d’ouvrages. Elle engendre des contraintes et/ou des déplacements imprévisibles dans l’hypothèse d’un sol homogène. Ainsi, une prédiction de la réponse structurelle d’une fondation nécessite un modèle tenant compte à la fois de l’interaction sol structure et de la distribution spatiale des propriétés du sol. Nous étudions la sensibilité du tassement différentiel et des contraintes induites dans un radier par rapport au module d’Young. La variabilité spatiale des propriétés du sol est modélisée dans le cadre de la théorie des champs stochastiques. L’influence du comportement de l’interface est aussi analysée. Le rôle important joué par les caractéristiques géométriques (épaisseur du radier) et l’échelle de fluctuation horizontale, est souligné. Le risque d’atteindre des valeurs importantes de tassements différentiels et de contraintes est quantifié. L’importance de la modélisation 3D de la variabilité du sol a été montrée : la rotation, dans le modèle 2D, est 30% plus grande que celle du modèle 3D. Le tassement absolu est 35% plus important qu’au sein d’un sol de fondation homogène.

ABSTRACT. The spatial variability of soil properties has a major influence on many types of structures (buildings, roads, buried pipelines, railways ...). It creates stress and/or movements which are unforeseen if one assumes soil homogeneity. Thus, predicting the structural response of a foundation requires a model taking into account both the interaction of soil structure and spatial distribution of soil properties. We study the sensitivity of the differential settlement and the stresses induced in a raft with regard to the Young’s modulus. The spatial variability of soil properties is modelled in the framework of the theory of stochastic fields. The influence of the interface behaviour is also analyzed. The important role played by the geometric characteristics (thickness of the raft) and the horizontal scale of fluctuation, is underlined. The risk of reaching high values of differential settlement and stresses is quantified. The importance of 3D modelling of soil variability has been shown : the rotation, in a 2D model, is 30% larger than the 3D one. The absolute settlement is 35% larger than in homogeneous subgrade.

MOTS-CLÉS : interaction sol-structure, hétérogénéité de sol, longueur de corrélation, tassement différentiel, variabilité spatiale, champs stochastiques.

KEY WORDS : soil-structure interaction, heterogeneous soil, correlation length, differential settlement, spatial variability, stochastic fields.

1. Introduction

L'étude des incertitudes en géotechnique reçoit de plus en plus une attention particulière de la part des chercheurs et des ingénieurs. En effet, la présence d'hétérogénéités lithologiques, ou d'une hétérogénéité spatiale des propriétés du sol, peut générer, lors de la vie de l'ouvrage, des mouvements différentiels ou une redistribution des sollicitations. Lorsque ces mouvements dépassent ceux initialement prévus, des désordres apparaissent et dans certains cas la ruine de l'ouvrage est possible.

Différents modèles statistiques sont proposés dans la littérature pour décrire un milieu stochastique. Ils peuvent être classés en deux groupes : les modèles à variables aléatoires [LUM 74] et les modèles à champ aléatoire [VAN 83].

Par exemple, dans le cadre de la théorie de l'élasticité, pour les premiers modèles, habituellement, la variable aléatoire est le module d'Young ; pendant que pour les seconds on considère sa moyenne et son écart-type pour décrire le champ aléatoire. Plus généralement, un champ aléatoire peut être caractérisé par une valeur moyenne, un écart-type et une fonction d'autocorrélation ou une longueur de corrélation. Le modèle de variables aléatoires est un cas limite du modèle à champ aléatoire obtenu lorsque la fonction d'autocorrélation tend vers l'infini [PRZ 99].

Nous avons montré, [BRE 05] et [NIA 07], comment la réponse de l'ouvrage est gouvernée par le rapport de la longueur de corrélation du sol à des dimensions caractéristiques de la géométrie du problème, mais ces résultats ont été obtenus en adoptant un modèle mécanique très simple pour l'interaction sol-structure : le modèle de Winkler, qui suppose une réaction élastique unidimensionnelle sous l'ouvrage [BRE 14], [IMA 14], [LAB 07].

Nous proposons d'étudier un problème de fondation en considérant l'ensemble constitué par le massif de sol, la structure (radier) et l'interface par l'intermédiaire d'un code aux éléments finis (Cast3M) avec un modèle tridimensionnel. La variabilité spatiale du massif de sol est modélisée selon la théorie des champs stochastiques. La méthode des bandes tournantes est utilisée pour représenter la variabilité spatiale des modules d'Young (3D) et les simulations numériques sont effectuées à l'aide de la méthode de Monte-Carlo [JIM 09]. Le comportement de l'interface est décrit, d'une part, par des éléments de type ressort restant dans le domaine élastique et d'autre part, par un modèle élastoplastique Mohr-Coulomb.

2. Hypothèses

2.1. Sol de fondation : simulation du module d'Young

On suppose dans cette étude que le massif de sol est un milieu élastique linéaire. La loi de dispersion utilisée est la loi normale. Le module d'élasticité moyen est pris égal à $E_{\text{moy}} = 20\text{MPa}$ avec un coefficient de variation de 25%, soit un écart type $\sigma_E = 5\text{MPa}$. Les effets de la variation du coefficient de Poisson sur les résultats sont considérés comme négligeables [PRZ 99].

La variabilité spatiale ou hétérogénéité est introduite par la technique de Matheron, [MAT 72], qui est originale en ce sens qu'elle ramène toute simulation à 2 ou 3 dimensions à une simulation simple à une dimension sur un certain nombre de droites que l'on fait ensuite tourner dans l'espace : méthode des bandes tournantes. Cette méthode permet d'obtenir avec des temps de calcul acceptables, une réalisation particulière ou la génération d'un champ scalaire aléatoire gaussien stationnaire, d'une fonction aléatoire conditionnée par ses deux premiers moments : moyenne et variogramme. L'intérêt de réduire le temps de simulation est d'autant plus fort que l'on souhaite procéder à un nombre élevé de simulations, dans le cadre d'une estimation des propriétés statistiques de la réponse du système.

La fonction d'autocovariance sera :

$$C_{ij} = \sigma_E^2 \exp \left(- \sqrt{ \left(\frac{d_{1ij}}{\lambda_x} \right)^2 + \left(\frac{d_{2ij}}{\lambda_y} \right)^2 + \left(\frac{d_{3ij}}{\lambda_z} \right)^2 } \right) \quad [1]$$

Où d_{1ij} , d_{2ij} , d_{3ij} sont les coordonnées du vecteur liant deux points du maillage considérés et λ_x , λ_y , λ_z les longueurs de corrélation suivant les axes d'anisotropie structurale. L'utilisation de la méthode des bandes

tournantes requiert un maillage régulier qui respecte l'anisotropie de la corrélation spatiale. Les points supports dans la génération du champ sont les nœuds du maillage.

2.2. Fondation superficielle : radier en béton armé

Le module d'élasticité du radier en béton armé est constant et égal à 10720MPa. Nous considérons une charge d'exploitation verticale uniforme sur le radier de $q=100\text{kPa}$ et nous négligeons le poids propre du radier.

2.3. Interface sol – structure

L'interface sol – structure est décrit par des ressorts élastiques et un modèle élastoplastique Mohr – Coulomb, figure 1. En pratique, on peut considérer une interface lisse [PRA 95]. Deux modèles de comportement de l'interface sont considérés : (a) un modèle élastique linéaire avec raideurs normale et de cisaillement : K_n , K_s ; (b) un modèle élastoplastique Mohr – Coulomb : C = cohésion, ϕ = angle de frottement. En compression, au-delà de la contrainte $\bar{\sigma}_n$ ($\varepsilon \leq -\bar{\varepsilon}_n$), la raideur normale est égale à E_f et il apparaît une déformation permanente.

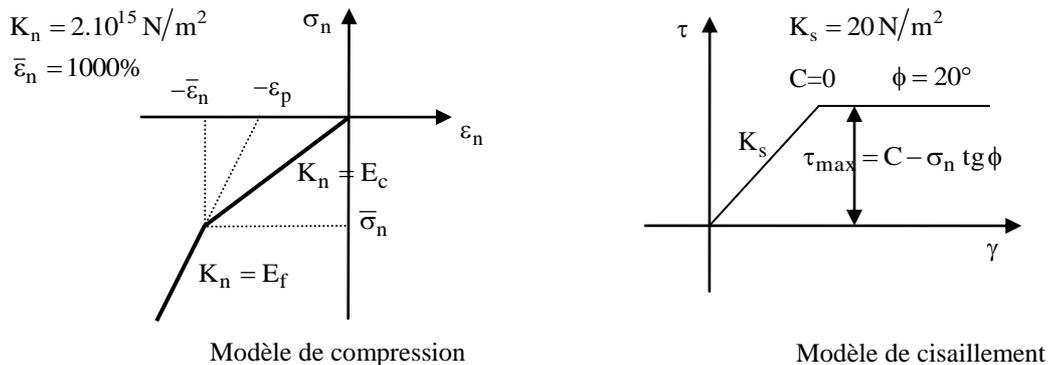


Figure 1. Modèle élastoplastique Mohr – Coulomb.

3. Géométries et conditions aux limites

Le radier a une longueur $L=20\text{m}$ et une largeur $B=10\text{m}$. Son épaisseur, h , est un paramètre de l'étude, égale à : 0,30m ; 0,60m ; 0,90m ; 1,20m ; 1,30m ; 1,50m ; 2m ; 3m ; 4m. Le radier est généralement considéré comme « souple » pour une épaisseur inférieure ou égale à 0,50m et « rigide » dans le cas contraire [PRA 95].

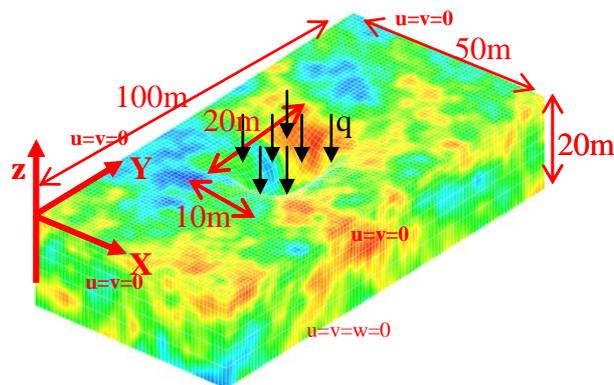


Figure 2. Modèle tridimensionnel, géométrie et conditions aux limites (le champ de couleurs correspond, naturellement, à la variabilité spatiale du module élastique).

Le massif de sol est représenté sous la forme d'un parallélépipède rectangle d'épaisseur 20m, de dimensions 100m x 50m. Sous ce massif, un substratum indéformable est supposé exister. Les conditions aux limites en déplacement sont représentées sur la figure 2. Le sol est supposé avoir une structure d'hétérogénéité isotrope transverse. La longueur de corrélation verticale λ_z est prise égale à 6m ou 10m [BAG 00]. On privilégie l'analyse de l'influence des longueurs de corrélation horizontales ($\lambda_x = \lambda_y$) qui prennent 12 valeurs variant continûment entre 3 mètres et 200 mètres. Des études précédentes, [BRE 05] et [NIA 07], ont montré le rôle essentiel de cette grandeur.

4. Analyse et discussion des résultats

4.1. Importance de l'hétérogénéité

La figure 3b montre un exemple de l'effet de la variabilité spatiale sur la contrainte de traction longitudinale au niveau de la fibre inférieure du radier. La configuration homogène, avec le même module moyen, figure 3a, sert de base de comparaison. On observe que le résultat est dissymétrique. La localisation de la valeur maximale n'est pas connue par avance car elle ne se situe pas nécessairement au centre du radier. La valeur maximale est dans ce cas plus importante de 25% que celle du résultat homogène.

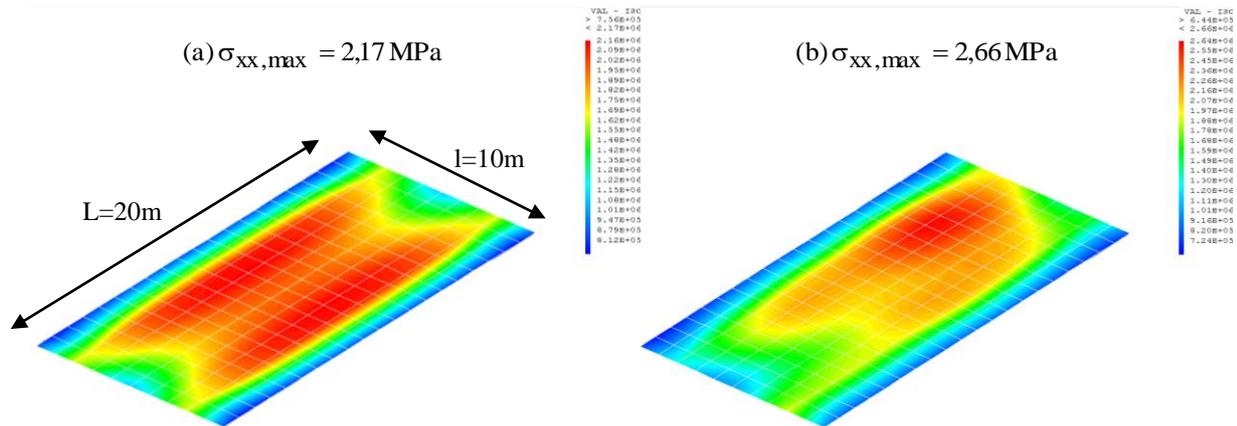


Figure 3. Distribution de la contrainte de traction à la base du radier ($h = 0,30m$) : (a) sol de fondation homogène, (b) sol de fondation hétérogène, pour une simulation ($\lambda_z = 6m$, $\lambda_x = \lambda_y = 9m$).

Nous constatons que l'analyse des tassements (absolus ou différentiels), des moments et des contraintes s'avère complexe. En outre, la longueur de corrélation influence l'amplitude de ces grandeurs.

Dans cette étude, pour chaque réalisation de l'aléa : (a) les valeurs maximales des contraintes dans le radier sont considérées, ainsi que la position où ces maximums sont atteints. En effet, ces contraintes se déduisent des moments de flexion et d'efforts normaux, par les expressions suivantes : $\sigma_{xx} = N_x/h + k6M_x/h^2$ et $\sigma_{yy} = N_y/h + k6M_y/h^2$, avec h épaisseur du radier ; $k = +1$: contraintes sur la face supérieure du radier ; $k = -1$: contraintes sur la face inférieure du radier et $k = 0$: distribution au niveau de la fibre moyenne ; (b) pour le tassement absolu, le déplacement vertical au centre du radier est considéré, même si ce n'est pas le maximum ; (c) pour le tassement différentiel ou la rotation, elle est définie sous la forme : $\Omega_{3Dy,max} = |(\Delta_W - \Delta_E)/L|$; où Δ_W = déplacement à l'extrémité gauche ou Ouest du radier ; et Δ_E = déplacement à l'extrémité droite ou Est du radier, c'est-à-dire selon le grand axe du radier, la direction y et en considérant la valeur absolue ; et L la longueur du radier ($=20m$). La rotation $\Omega_{3Dx,max}$, dans la direction du petit axe du radier, bien que plus forte, n'est pas considéré ici. En effet, dans nos études 2D, [NIA 09], nous avons considéré le radier selon son grand axe ($L=20m$), reposant sur un sol de fondation supposé en déformation plane. Par conséquent, la comparaison avec la modélisation 3D, implique de considérer le même axe.

Le nombre de tirages pour chaque longueur de corrélation horizontale est de 1000. Les simulations sont exploitées de manière à quantifier la valeur moyenne, les fractiles 50% et 95%, de tous les résultats intéressants (contraintes, déplacements et rotations), dont on sait qu'ils sont susceptibles d'engendrer des désordres.

4.2. Influence de la longueur de corrélation sur la rotation

L'évolution de la rotation en fonction de la longueur de corrélation, confirme des résultats antérieurs obtenus en simulations monodimensionnelle et bidimensionnelle [BRE 05]. En effet, l'évolution de la valeur absolue de la rotation en fonction de la longueur de corrélation, est en forme de « cloche », avec un extremum au voisinage de la demi longueur du radier, ici $\lambda_x = \lambda_y = 9m$, Figure 4. Les graphiques qui suivent sont relatifs aux fractiles à 95%. Les raisons de cette variation non monotone sont les suivantes : pour des longueurs de corrélations tendant soit vers zéro soit vers l'infini, le sol se comporte sous le radier comme un milieu homogène, qui n'engendre aucune rotation (la symétrie est respectée). La valeur de la rotation semble dépendre (mais beaucoup moins fortement) de la rigidité du radier, avec des rotations plus élevées pour les plus fortes épaisseurs.

La valeur maximale obtenue pour $\lambda_x = \lambda_y = 9m$ est $\Omega_{3Dy,max} = 0,00046$ rad, alors que l'on avait une rotation $\Omega_{2D,max} = 0,00064$ rad avec des simulations bidimensionnelles [NIA 09], soit une différence de l'ordre de 30%. La

simulation en deux dimensions est plus pessimiste, car elle génère dans la direction y des raideurs dont les faibles valeurs sont affectées au sol sur l'ensemble d'une bande (de direction x). En trois dimensions, la variabilité dans la direction transversale x tend à compenser ces faibles valeurs par de plus fortes valeurs et l'effet de l'hétérogénéité est moins marqué.

Ces rotations correspondent, avec le module élastique moyen utilisé (20 MPa), à un tassement différentiel global entre les deux extrémités de radier compris entre 8mm et 10mm, a priori, sans conséquences pour le radier, les valeurs usuellement jugées critiques étant de 25mm sur sable et 40mm sur argile [HOU 05].

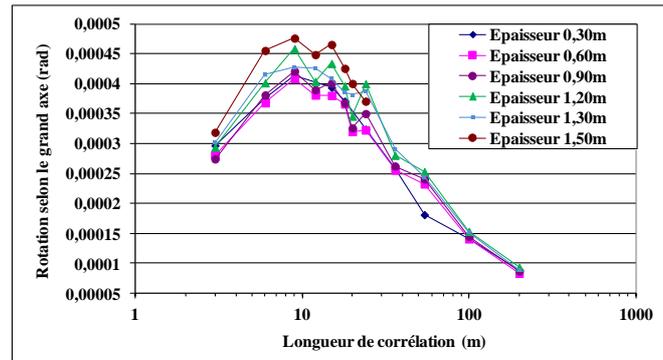


Figure 4. Influence de la longueur de corrélation sur la rotation, Ω_{3Dy} , (fractile 95%).

4.3. Influence de la longueur de corrélation sur le tassement au centre du radier

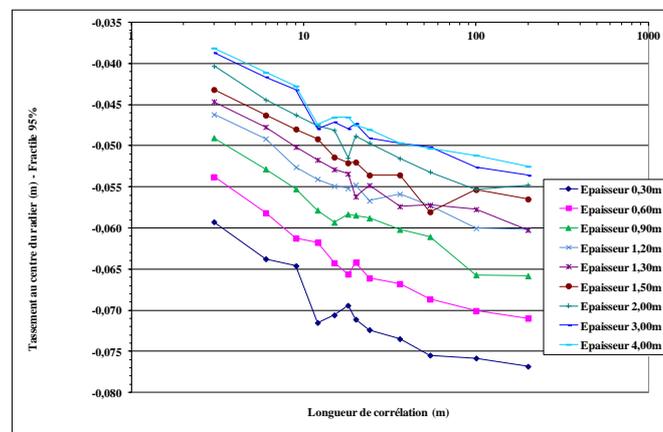


Figure 5. Influence de la longueur de corrélation sur le tassement au centre du radier, fractile 95% ($\lambda_z = 10m$, $\lambda_x = \lambda_y$).

Le tassement absolu maximum au centre du radier, varie de 38mm à 48mm pour un sol de fondation homogène, [NIA 09]. Il est plus important pour un radier souple ($h = 0,30m$), qui présente une grande courbure au centre. Cependant, il varie de 38mm à 77mm pour le fractile 95% lorsqu'on considère une assise de fondation hétérogène, soit 35% de plus, figure 5. Sachant que pour un radier, les valeurs admissibles sont de 50mm à 60mm pour un sable et de 65mm à 100mm pour une argile [HOU 05], une attention particulière est donc à porter aux structures sur sol hétérogène. En outre, la figure 5 montre qu'au-delà du résultat déterministe (tassement qui augmente quand h diminue), il y a une influence de la longueur de corrélation avec des valeurs plus importantes pour des longueurs de corrélation importantes. Ceci vient du fait que, pour $\lambda_x = \lambda_y$ grande, il y a une forte probabilité de rencontrer une zone importante de mauvais sol (portance faible) sous tout le radier.

4.4. Influence de la longueur de corrélation et de la rigidité sol structure sur la contrainte de traction, σ_{xx} , à la base du radier

La figure 6 montre la variation de contrainte de traction longitudinale à la base du radier (fractiles 50% et 95%) en fonction de la longueur de corrélation. La valeur pour un sol supposé homogène est de 2,24MPa.

L'effet majeur est celui de l'hétérogénéité : le fractile à 95 % dépasse de près de 50 % la valeur médiane. L'effet de la longueur de corrélation est moindre, avec une légère diminution quand λ_x augmente : la valeur

maximale pour les faibles longueurs de corrélation (au voisinage de 3m) est de 3,60MPa et elle tend vers 3,20MPa pour de fortes longueurs de corrélation. La différence avec le cas homogène peut donc atteindre 60%.

Ces résultats montrent que le radier doit nécessairement être « armé ». En effet, si nous considérons l'état limite de service, pour un dallage « non armé », on doit vérifier $\sigma_{ELS} = \sigma_{xx} \leq 0,60 \sigma_R \approx 1,05 f_{ti}$ (où f_{ti} est la contrainte de traction du béton), [THO 99], ce qui correspond, dans le cas d'un béton courant, dosé à 350kg de ciment classe 45 par m^3 de béton, à une valeur maximale de σ_{ELS} égale à 2,2 MPa.

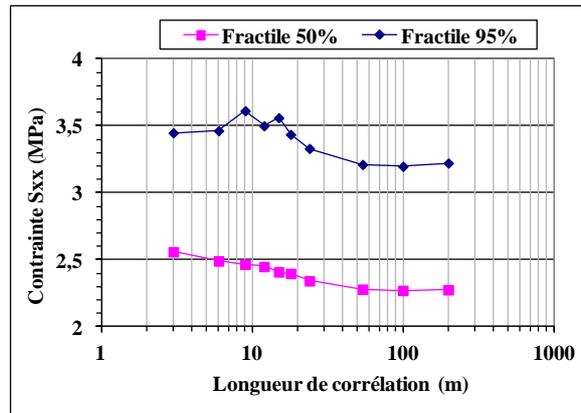


Figure 6. Contrainte de flexion longitudinale, σ_{xx} , sur la fibre inférieure du radier, épaisseur $h = 0,30m$.

Nous savons que les répartitions des contraintes dans le radier et le sol de fondation sont différentes suivant la rigidité du massif de fondation, la nature du sol et le mode d'application des charges. [VER 71] ont montré l'intérêt d'introduire des grandeurs adimensionnelles caractérisant la rigidité relative du sol et de l'ouvrage : $K_f = (E_{radier} h^3) / (12LB^2 E_{sol})$; où, E_{radier} , module d'élasticité du radier en béton ; E_{sol} , module de déformation ou module œdométrique du sol ; L et B longueur et largeur de la fondation ; h épaisseur de la fondation. Ce qui donne $K_f = 0$ pour un radier infiniment souple ou un sol de fondation infiniment rigide (rocher) ; $K_f = \infty$ pour un radier infiniment rigide, ou un sol déformable dans le domaine élastique.

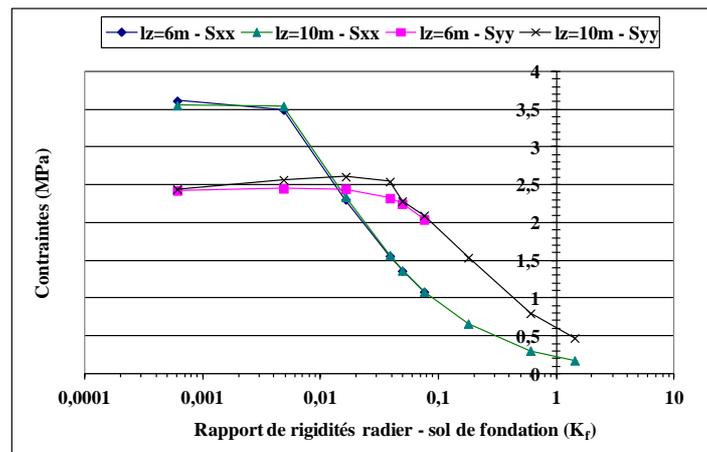


Figure 7. Evolution des contraintes de flexion longitudinale et transversale en fonction du rapport de rigidités radier – sol de fondation, fractile 95% ($\lambda_z = 6m$ ou $10m$, $\lambda_x = \lambda_y = 9m$).

La figure 7, nous donne l'influence de ce rapport de rigidités (via l'épaisseur $h = 0,30m$; $0,60m$; $0,90m$; $1,20m$; $1,30m$; $1,50m$; $2m$; $3m$ et $4m$), sur le fractile à 95 %, des contraintes de tractions dans les directions longitudinales et transversales, pour la longueur de corrélation horizontale $\lambda_x = \lambda_y$ égale à $9m$. La longueur de corrélation verticale λ_z a peu d'influence. Le critère le plus sévère (selon la direction x ou y) dépend de la valeur du rapport de rigidités K_f . La contrainte de flexion longitudinale σ_{xx} est la plus critique pour un rapport K_f faible (radier souple), mais elle chute quand la rigidité du radier (via l'épaisseur) augmente, et la contrainte de flexion transversale σ_{yy} devient plus critique ($h \geq 0,90m$).

4.5. Prise en compte d'une interface plastique

Le modèle utilisé est le modèle élastoplastique de Mohr–Coulomb. L'interface modélisée est supposée « lisse », c'est-à-dire que la raideur tangente est négligeable par rapport à la raideur normale.

La figure 8 montre que la plastification de l'interface ne paraît pas avoir d'influence notable sur les déplacements, ici la rotation du radier. Ceci est certainement dû au choix des paramètres du modèle, en particulier la limite d'élasticité. Des simulations ultérieures permettront de préciser le comportement de l'interface.

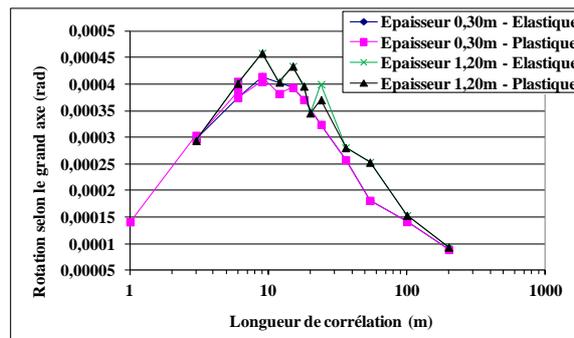


Figure 8. Prise en compte de la plasticité de l'interface sur la rotation.

5. Conclusion

L'influence de l'hétérogénéité tridimensionnelle des sols sur la réponse structurale d'un radier a été étudiée.

En considérant un modèle de sol basé sur la théorie des champs aléatoires, nous avons pu modéliser la variabilité spatiale du module d'élasticité du sol. L'importance de l'étude tridimensionnelle de l'hétérogénéité du sol par rapport au modèle bidimensionnel a été montrée. En effet, les valeurs critiques des déplacements et des contraintes peuvent se situer à n'importe quel point sur un plan, modèle 3D, et non sur une droite comme le suggère le modèle 2D.

Le phénomène d'interaction sol-structure a été étudié en fonction de la variabilité spatiale des propriétés du sol. La prise en compte de la variabilité spatiale ne permet plus de conserver les considérations de symétrie et impose une analyse soignée des résultats, de manière à identifier les zones où sont développées les contraintes maximales.

Une conséquence significative de la variabilité est la dispersion statistique des résultats (déplacements, contraintes) qui peuvent ainsi atteindre, avec une probabilité significative, des valeurs très supérieures à celles prédites en modélisation homogène. Nous avons par exemple montré que le radier, qui satisfait théoriquement aux critères de dimensionnement d'un radier non armé si l'on suppose le sol homogène ne les satisfait plus si l'on tient compte de la variabilité spatiale.

La redistribution des sollicitations et des tassements (absolue et différentiel) est contrôlée par les paramètres suivants : (a) le coefficient de variation et les longueurs de corrélation (dans les trois directions), qui caractérisent le degré d'hétérogénéité du sol. L'existence d'une longueur de corrélation « pessimum » a été confirmée. Elle est de l'ordre de la demi-longueur de la structure ; (b) la rigidité relative sol-ouvrage, quantifiée par un rapport adimensionnel.

Le comportement plastique de l'interface semble négligeable au vu des paramètres de comportement choisis. Une étude plus poussée de ces paramètres sera réalisée. La comparaison d'une interface élasto-plastique par rapport à une interface infiniment rigide qui reprend de fortes contraintes tangentielles sans plastification sera effectuée.

L'ensemble de ces résultats soulignent l'intérêt de la prise en compte de la variabilité spatiale pour améliorer la caractérisation de la sécurité effective des radiers. Il conviendra aussi d'améliorer les connaissances sur cette variabilité, en particulier sur la longueur de corrélation des propriétés des sols. L'exploitation de campagnes de reconnaissance suffisamment denses, voire de campagnes de reconnaissance géophysique devrait être entreprise pour identifier des valeurs représentatives des longueurs de corrélation horizontales, dans la mesure où c'est un paramètre de première importance.

6. Bibliographie

- [BAG 00] BAGUELIN F., KOVARIK J.B., « Une méthode de détermination des valeurs caractéristiques des paramètres géotechniques », *Revue Française de Géotechnique*, No. 93, 4^e trimestre, 2000, p. 35-41.
- [BRE 05] BREYSSE D., NIANDOU H., ELACHACHI S.M., HOUY L., « Generic approche of soil-structure interaction considering the effects of soil heterogeneity », *Géotechnique*, vol. 54, No. 2, 2005, p. 143-150.
- [BRE 14] BREYSSE D., VAILLANCOURT M., HOUY L., PERRATON D., « Variability of subgrade soil rigidity and its effects on the roughness of flexible pavements : a probabilistic approach », *Materials and Structures*, DOI 10.1617/s11527-014-0419-z
- [HOU 05] HOUY L., Variabilité des sols et risques liés à l'interaction sol-ouvrage, Thèse de doctorat, Université bordeaux 1, 2005.
- [IMA 14] IMANZADEH A., DENIS A., MARACHE A., « Foundation and overall structure designs of continuous spread footings along with soil variability and geological anomaly », *Engineering Structures*, vol. 71, 2014, p. 212-221.
- [JIM 09] JIMENEZ R., SITAR N., « The importance of distribution types on finite element analyses of foundation settlement », *Computers and Geotechnics*, 36, 2009, p. 474-483.
- [LAB 07] LA BORDERIE C., BREYSSE D., « Etude du tassement différentiel sur sols hétérogènes », *REGC*, vol. 11, 2007, p. 453-462.
- [LUM 74] LUMB P., *Application of statistics in soil mechanics*, Soil Mechanics, Chap.3. New Horizons, London, 1974.
- [MAT 72] MATHERON G., *Ensembles aléatoires et géométrie intégrale*, Paris, Presses de l'Ecole des Mines, 1972.
- [NIA 07] NIANDOU H., BREYSSE D., « Reliability analysis of a piled raft accounting for soil horizontal variability », *Computers and Geotechnics*, 34, 2007, p. 71-80.
- [NIA 09] NIANDOU H., LA BORDERIE C., BREYSSE D., « Influence de l'hétérogénéité tridimensionnelle des sols sur un radier », *XXVIIèmes Rencontres AUGC*, St Malo, 2009, 03/41, p. 1-12.
- [PRA 95] PRAT M., BISCH P., MILLARD A., PIJAUDIER-CABOT G., AFPC, *Emploi des éléments finis en génie civil – La modélisation des ouvrages*, Paris, Editions Hermès, 1995.
- [PRZ 99] PRZEWLOCKI J., « Reduction of dimensions in random, elastic soil medium », *International Journal of Solids and Structures*, 36, 1999, p. 5233-5254.
- [THO 99] THONIER H., *Conception et calcul des structures de bâtiment*, Paris, Presses des Ponts et Chaussées, Tome 1, 1999.
- [VAN 83] VANMARCKE E., *Random fields*, Cambridge, MIT Press, 1983.
- [VER 71] VERDEYEN J., ROISIN V., NUYENS J., *Applications de la mécanique des sols*, Edition Dunod, 1971.