
Modélisation de la compacité granulaire par une approche d'Apprentissage Automatique

Abdelfeteh SADOK¹, Rachid ZENTAR¹, Nor-Eddine ABRIAK¹

¹Université Lille Nord de France, 1 bis Geroges Lefèvre, 59044 Lille, France
Ecole Nationale Supérieure des Mines de Douai, LGCgE-GCE, 764Bd Lahure, BP 10838, 59508 Douai, France, abdelfeteh.sadok@mines-douai.fr.

RÉSUMÉ. La prévision de la compacité (ou de la porosité) d'un mélange de grains secs est une vieille question, commune à bien des domaines techniques et scientifiques. Dans le domaine de la formulation des matériaux granulaires, on se restreint généralement à la question de la détermination des granularités conduisant aux compacités les plus fortes. Devant les difficultés théoriques qu'elle soulève, l'approche générale consistait à rechercher, par l'expérience à l'aide de courbes maîtresses, des distributions granulaires compactes et à tenter de s'en rapprocher en combinant les matériaux dont on dispose [SED 94].

En reprenant le problème dans son contexte général, et devant l'empirisme des approches conventionnelles, plusieurs modèles ont été développés antérieurement qui permettent de prédire avec une certaine précision la compacité d'un mélange granulaire. Le Modèle d'empilement compressible MEC proposé par DE LARRARD [DEL 00], qui est une version améliorée du modèle de suspension solide qui est lui-même basé sur le modèle linéaire de compacité [POU 01]. C'est un des modèles prédictifs qui permet de bien estimer la compacité d'un mélange en fonction du mode de serrage et des proportions des composants. Cependant ce modèle perd de sa force de prédiction puisqu'il nécessite la mesure au laboratoire d'un certain nombre de paramètres. Dans ce contexte là, on propose par le présent travail d'utiliser l'apprentissage automatique afin de présenter un modèle qui permet de prédire la compacité granulaire et uniquement en fonction des paramètres intrinsèques des constituants facilement accessibles à l'expérience.

Ce travail présente un double intérêt : proposer un modèle prédictif de la compacité d'un mélange granulaire par une nouvelle approche et démontrer la fiabilité de la PG comme outil révolutionnaire faisant partie des algorithmes évolutionnistes d'apprentissage automatique dans la modélisation des phénomènes complexes.

ABSTRACT. The prediction of a dry granular mixtures compacity (or porosity) is an old problem common to many technical and scientific domains. The granular mixtures design is generally restricted to the question of the mixture leading to a maximum compacity. Due to the theoretical difficulties induced, the general approach consisted in seeking compact granular distributions via an experimental approach with optimal curves.

In the general context, and due to the conventional empiricism approaches, several models have been developed.. These models allow predicting a granular mixture compacity with some improvements. The compressible Packing model (MEC) proposed by De Larrard [DEL 00] is an improved version of the solid suspension model which is based on the linear model of compacity [POU 01]. The MEC is one of the predictive models. It allows the mixture compacity estimation based on the compaction mode and the components proportions. However this model loses its predictive power because of the difficulties induced by the measurement of some parameters in the laboratory. In the present study, the aim is to propose a model which allows predicting the granular mixtures compacity on the basis of intrinsic parameters (easily accessible) of the components via an experimental approach. The model will be defined on the basis of machine learning tool.

This work has a double interest: proposing a predictive model of a granular mixture compacity with a new approach and demonstration of the Genetic Programming reliability as a revolutionary tool which forms part of the machine learning algorithms in complex phenomena modelling.

MOTS-CLÉS : Formulation, Compacité granulaire, Béton, Apprentissage automatique, Programmation génétique.

KEY WORDS: Formulation, Granular compacity, Concrete, Machine learning, Genetic Programming.

1. Introduction

La compacité d'un mélange granulaire est un paramètre important pour le béton mais aussi pour de nombreuses applications dans le Génie Civil, en effet beaucoup de matériaux composites (tels que le béton) sont fabriqués par des inclusions granulaires noyées dans une matrice liante. L'objectif est souvent de combiner les grains de façon à minimiser la porosité, afin d'utiliser le moins possible de liant [BER 04]. Cependant réduire le problème de formulation à une question de compacité maximale du squelette granulaire est parfois une démarche erronée. Par contre la prédiction de la compacité dans l'optique de l'introduire dans la résolution des problèmes d'optimisation multi-objectifs (POM) est une démarche plus logique.

En effet, une compacité autre que maximale permet dans certain cas d'améliorer certaines propriétés désirées (concept de compromis), ainsi la prédiction de la compacité par un modèle en fonction des propriétés intrinsèques des constituants, contribue indirectement à la prédiction des autres propriétés du matériau formulé. Nous citons pour exemple la démarche de De Larrard [DEL 00] avec l'introduction de la compacité à travers l'Épaisseur Maximale de la Pâte (EMP) [1] dans la formule de Féret, qui prédit la résistance mécanique du béton. Ainsi, la prédiction de la compacité a permis de mieux prédire la résistance mécanique [BER 04].

$$EMP = D_{\max} (\sqrt[3]{g^*/g} - 1) \quad [1]$$

Où : D_{\max} est la dimension des plus gros granulats, g^* est la compacité granulaire des granulats utilisés pour fabriquer le béton définie pour un indice de serrage de 9 et g est la compacité granulaire au sein du béton.

Nous concluons donc que lorsque la compacité granulaire est un paramètre influent sur une propriété donnée d'un matériau comme la résistance mécanique ou ouvrabilité, sa modélisation devient primordiale pour une meilleure prédiction de la propriété cible.

2. Matériels et méthodes

La compacité granulaire est un problème particulièrement complexe car il dépend d'un grand nombre de variables difficiles à régler intuitivement [ELB 05]. La nature et la forme des granulats, les dosages des constituants, le mode de compactage ou le volume de confinement sont tous des paramètres qui influencent la compacité granulaire. Seule la réalisation d'expériences va permettre d'appréhender et de modéliser de tels phénomènes complexes avec une recherche de variations simultanées pour toutes les variables contrôlées afin, d'extraire un maximum d'informations.

Un certain nombre d'approches pour modéliser de pareils phénomènes complexes, ont été proposées en incluant la modélisation empirique ou de calcul (modélisation par éléments finis), des techniques statistiques par l'utilisation de régressions multi-variables et les approches de l'intelligence artificielle comme les réseaux de neurones artificielles « Artificiel neural networks » [AGR 10]. Les outils d'apprentissage automatique ont démontré leurs efficacités face aux phénomènes complexes, c'est dans ce contexte qu'on propose dans ce travail, l'utilisation de la Programmation Génétique (PG) vulgarisée par les travaux de KOZA [KOZ 92], ces nouveaux algorithmes d'apprentissage font partie de la famille des algorithmes évolutionnaires, ils utilisent la notion de sélection naturelle et l'appliquent à une population de solutions potentielles d'un problème donné.

2.1. La Programmation Génétique

La programmation génétique (PG) est souvent utilisée pour créer des formules mathématiques qui représentent au mieux un ensemble de données numériques, l'intérêt de l'utilisation de la PG réside principalement dans sa capacité à résoudre les problèmes pour lesquels la structure et la taille de la solution ne sont pas connues et les problèmes pour lesquels nous pouvons nous contenter de petites améliorations dans les solutions existantes [PÉR 12]. Les structures évoluées par programmation génétique sont représentées sous forme linéaire, d'arbre ou de graphe. Dans notre application nous n'allons traiter que les structures en arbre, appelé « arbre syntaxique » (Figure 1).

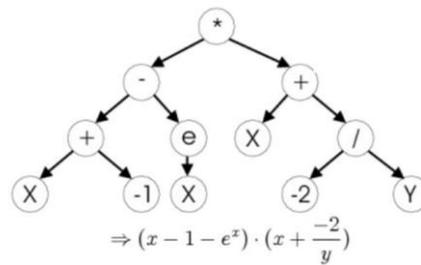


Figure 1. Une formule mathématique représentée sous forme d'arbre [BOU 12].

Pour mettre en place la méthode, il est nécessaire tout d'abord de passer par un certain nombre d'étapes préliminaires et cela quelle qu'elle soit l'approche choisie. Ces étapes sont synthétisées sur la Figure 2. Ensuite vient l'exécution de l'algorithme.

1. La définition des primitives : l'ensemble des terminaux + l'ensemble des fonctions.
2. Le choix de la fonction de fitness appropriée.
3. Le choix de l'algorithme de sélection.
4. Le choix des paramètres de recherche.
5. La taille de la population initiale.
6. La taille maximale de la population.
7. La taille maximale des individus (profondeur maximale des arbres, nombre maximal de nœuds par arbre).
8. Le taux de cross-over.
9. Le taux de mutation.
10. Les critères de terminaison de la recherche (seuil de fitness ou parfois le nombre maximal d'itérations).

Figure 2. Etapes préliminaires de la PG.

2.2. Partie expérimentale

La modélisation par apprentissage sur la base d'expériences, nécessite une certaine rigueur dans l'organisation des essais. Les plans d'expériences permettent cette organisation, ils sont définis comme suite ordonnée d'essais d'une expérimentation, chacune permettant d'acquérir de nouvelles connaissances en contrôlant un ou plusieurs paramètres d'entrée pour obtenir des résultats validant un modèle avec une bonne économie. Pour ce faire, il est important de déterminer au préalable les facteurs d'entrées (Inputs) et la réponse (Output) qu'est la Compacité du mélange granulaire.

2.2.1. Le choix des terminaux

On qualifie de facteur toute variable, obligatoirement contrôlable, susceptible d'influer sur la réponse observée. Comme l'apprentissage par la PG est supervisé, il est de notre charge de choisir les facteurs (Inputs) qu'on juge influents sur la réponse (Output) qui est la compacité. Quelques essais ont été menés au préalable (voir ci dessous) pour justifier le choix des facteurs à forte influence sur la compacité granulaire.

Pour entreprendre cette étude paramétrique, nous avons choisi 6 matériaux différents par la granulométrie et la nature des matériaux:

- Fillers de Boulonnais
- Sable du Gaurain 0/4,
- Gravillon du Gaurain 4/8,
- Gravier du Gaurain 8/14,
- Cailloux du Boulonnais 14/20,
- Granulats recyclés 4/16.

Le tableau suivant (Tableau 1) récapitule les caractéristiques des matériaux utilisés dans cette étude

Tableau 1. Récapitulatif des matériaux utilisés.

	d min (mm)	Dmax (mm)	D10 (mm)	D30 (mm)	D50 (mm)	D60 (mm)	Cu* (mm)	Cc** (mm)	D _{moy} (mm)
Fillers	2 µm	0.34	0.88	4.54	13.77	21.44	24.36	1.09	0.46
Gaurain 0/4	0.063	4	0.17	0.47	13.77	1.39	7.92	0.91	1.59
Gaurain 4/8	4	8	4.55	5.55	6.4	6.79	1.49	0.99	2.42
Gaurain 8/14	8	14	8.2	9.25	10.27	10.75	1.31	0.97	3.22
Boulonnais 14/20	14	20	14.11	15.3	16.78	17.74	1.25	0.93	3.90
4/16 Recyclé	4	16	5.07	8.65	11.02	12.2	2.40	1.20	3.30

*coefficient d'uniformité de Heizen, **Coefficient de courbure

Dans le but d'inclure l'effet de l'étendue granulaire, on va utiliser le diamètre moyen de chaque classe selon la formule [2] suivante (formule de Mellor) [GAB 07]:

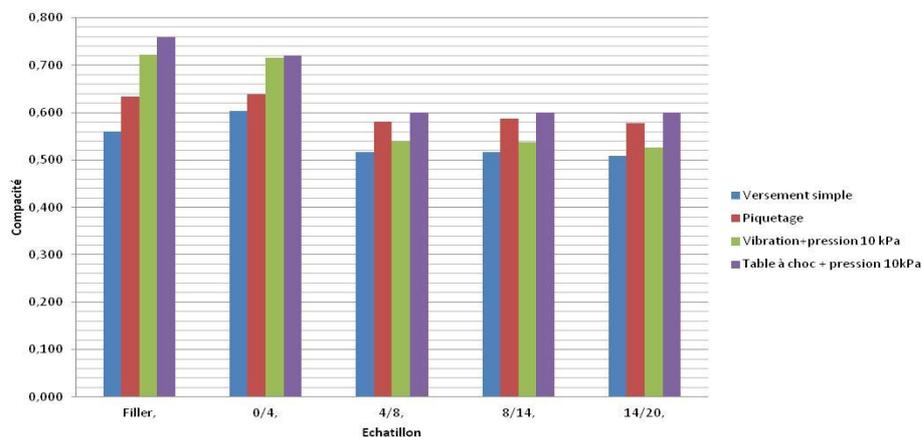
$$dm(i) = \sqrt[3]{\frac{(d_{i(1)} + D_{i(2)}^2)(d_{i(1)} + D_{i(2)})}{4}} \quad [2]$$

[d-D] : diamètre min et max de la tranche granulaire(i).

dm (i) : Diamètre moyen de la classe i.

Afin d'étudier de près l'influence du mode de serrage représenté par le coefficient de serrage « K », sur la compacité des mélanges binaires étudiés, quatre modes de compactage ont été préconisés à savoir : versement simple (NF EN 1097-3), piquetage (ASTM C29-78), vibration avec une pression de 10 kPa [ELB 05] et l'utilisation d'une table à choc avec pression de 10 kPa (LCPC).

Indépendamment de la nature et des dimensions des granulats, on constate à travers la Figure 4, que la compacité de chaque matériau est fortement influencée par le mode de compactage. En effet, ces conclusions concordent avec les travaux de Bernier [BER 04] où il présente l'indice de serrage K comme une grandeur scalaire continûment croissante représentative de l'énergie de serrage. Cependant, ce facteur n'est pas le seul à influencer la compacité d'un mélange granulaire, l'effet de l'étendue granulaire des composants et le pourcentage massique des fines (La classe granulaire du D_{max} inférieur dans un mélange binaire) par rapport à la masse totale du squelette, peuvent influencer la compacité du mélange d'une manière directe ou combinée avec les autres facteurs. Les courbes représentées dans la Figure 5, permettent d'analyser l'effet de ces facteurs.

**Figure 3.** Evolution de la compacité en fonction du mode de compactage.

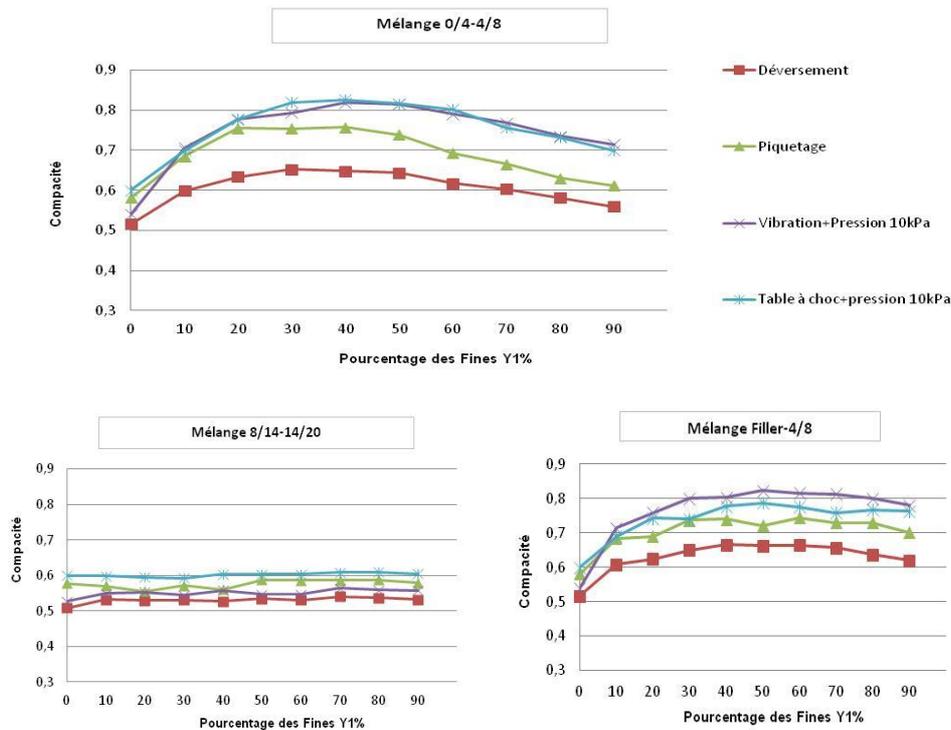


Figure 4. Variation de la compacité en fonction des pourcentages des fines, et l'effet de l'étendu granulaire ($d1_{moy}/d2_{moy}$) dans les différents mélanges.

A travers les mélanges Fillers-4/8 et 0/4-4/8 présentés sur la Figure 5, nous remarquons que le pourcentage des fines améliore la compacité des mélanges jusqu'à un certain dosage en fine optimal. Cependant dans le mélange 8/14-14/20 distingué sur les autres mélanges par étendue granulaire $d1_{moy}/d2_{moy}$ relativement petit, le pourcentage en fines n'améliore pas la compacité. Ceci est dû à une porosité similaire des deux composants du mélange, traduite par le faible écart de « d_{moy} » des deux tranches granulaire étudiées.

Nous constatons à travers ces essais qu'en plus de l'influence du coefficient du compactage « K » et le pourcentage des fines « $Y1$ » sur la réponse (compacité), il y a aussi un effet d'interaction entre les variables « $Y1$ » et « $d1/d2$ » sur la réponse, d'où les limites des plans d'expériences type « un facteur à la fois » dans ces cas où il y a un effet d'interaction entre les facteurs. Un plan factoriel complet semble donc plus adéquat à cette étude.

Afin d'inclure des paramètres intrinsèques caractéristiques des mélanges indépendamment du mode de mise en place, la notion de compacité résiduelle (ou virtuelle) a été introduite comme un paramètre d'entrée, la compacité réelle est déduite de cette compacité résiduelle par référence à un indice de serrage [3] ([DEL 00] & [SEB 10]).

$$\beta_i = \frac{C_i}{K} + C_i$$

[3]

β_i : compacité résiduelle de la classe i ,

C_i : compacité réelle de la classe i .

K : indice de serrage qui ne dépend que de l'énergie de mise en place,

En conclusion et sur la base de ces essais expérimentaux, les variables identifiées dans la section 2.2.1 et confirmées comme paramètres de forte influence sur la compacité résiduelle du mélange granulaire « β_m », sont les suivants : $Y1$, $Y2$, $\beta1$, $\beta2$, $Cc1$, $Cc2$, $d1_{moy}$, $d2_{moy}$.

Où : « β_m » est la compacité résiduelle du mélange, « $Y1$, $Y2$ » sont les pourcentages massiques des fines et gros granulats, « $\beta1$, $\beta2$ » sont les compacités résiduelles propres respectives des fines et gros granulats, « $Cc1$, $Cc2$ » sont les coefficients de courbure des courbes granulométriques respectives des fines et gros granulats, « $d1_{moy}$, $d2_{moy}$ » sont les diamètres moyens respectifs des fines et des gros granulats.

Cette étude paramétrique a révélé que le pourcentage massique des classes, composant un mélange granulaire binaire, influencent considérablement sur la compacité du mélange jusqu'à un dosage optimal, ceci est dû à l'insertion des granulats de petite dimension dans les vides inter-granulaires de la classe de dimension supérieure, d'où l'influence en parallèle de l'étendue granulaire ($d1_{moy}/d2_{moy}$) sur le pourcentage optimal des fins. En effet, l'étude a révélé que plus l'étendue granulaire est importante et plus l'influence du pourcentage des fins sur la compacité est significative. En plus, avec une étendue granulaire et tailles des classes granulaires fixes, l'influence des pourcentages massiques des classes est conditionnée également par la granulométrie des classes constituant le mélange, représentée par les coefficients de courbure.

Maintenant que les facteurs identifiés et la réponse connue, on propose un plan d'expériences pour créer une base de données d'apprentissage. Nous retenons un plan factoriel complet considéré comme « le plus sûr » d'après [TIN 10] pour l'étude de la dépendance entre les variables.

2.2.2. Critères de performances

Deux paramètres statiques, nommés, la racine carrée de l'erreur quadratique moyenne (RMSE) [4], et le coefficient de détermination (R^2) [5], ont été utilisés pour vérifier la fiabilité du modèle.

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (C_i - C'_i)^2}{N}} \quad [4]$$

C_i : compacité réelle mesurée de la classe i ,

C'_i : compacité réelle prédite par le modèle de la classe i .

Le coefficient de détermination (R^2) est le carré du coefficient de corrélation (r) qui est défini par :

$$r = \frac{\sum (C_i - \bar{C}_i)(C'_i - \bar{C}'_i)}{\sqrt{\sum (C_i - \bar{C}_i)^2 \sum (C'_i - \bar{C}'_i)^2}} \quad [5]$$

C_i : compacité réelle de la classe i mesurée,

C'_i : compacité réelle de la classe i prédite par le modèle.

2.3. Modélisation par Programmation Génétique

On a un ensemble de paramètres à ajuster au préalable pour lancer le processus d'identification. Ces paramètres se résument principalement aux fonctions : les terminaux, la fonction fitness et les opérateurs de reproduction, mutation et croisement. Dans le tableau 2 sont récapitulés les paramètres retenus :

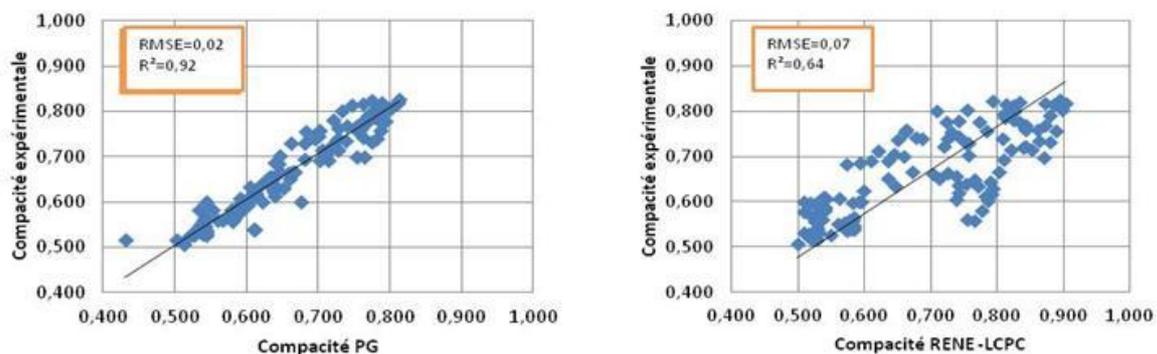
Tableau 2. Paramétrage de la PG

Objectif	Modélisation de la Compacité résiduelle d'un mélange granulaire binaire (β_m)
L'ensemble des terminaux	Y1, Y2, β_1 , β_2 , Cc1, Cc2, $d1_{moy}$, $d2_{moy}$
L'ensemble des fonctions	Plus, moins, times, divide, cos.
La fitness brute	L'erreur quadratique moyenne
Probabilité de mutation	Variable
Probabilité de croisement	Variable
Nombre de copie à reproduire	Variable
Le succès	Fitness nulle=la compacité d'un mélange en fonction des terminaux
La taille de la population	100
Le nombre de génération	200
La population initiale	Ramped Half-and-Half method
La méthode de sélection	Lexictour, Roulette, Sus, Tournament
L'élitisme	Replace
Les graphes	Arbre du meilleur individu, la fitness du meilleur individu.

Tableau 3. Récapitulatif des performances des modèles.

Critère de Performances	RMSE		R ²	
	RENE-LCPC	PG	RENE-LCPC	PG
0/4-4/8	0.06	0.03	0.49	0.85
Fillers-4/8	0.11	0.03	0.40	0.85
8/14-14/20	0.04	0.01	0.001	0.88
Tous les mélanges	0.07	0.02	0.64	0.92

Se basant sur le RMSE (Racine de l'erreur quadratique moyenne), on remarque en premier une prédiction moins bonne avec le RENE LCPC sur la compacité des mélanges contenant des Fillers. De plus, en comparant la capacité de prédiction des deux outils sur les 133 mélanges réalisés au laboratoire, on remarque la grande précision du modèle développé par la PG sur l'ensemble des mélanges (RMSE=0.02, R²=0.92) en comparaison avec les prédictions de RENE LCPC (RMSE=0.07, R²=0.64) (Figure 8). Rappelant également que la force du modèle développé par la PG réside dans le fait que ce même et unique modèle décrit le phénomène pour tous les mélanges, indépendamment de la granulométrie des constituants.

**Figure 7.** Prédiction de la compacité (Modèle RENE-LCPC Vs PG)

2.3.2. Simulations

Afin de valider le modèle de la PG, des simulations ont été proposées pour tester le modèle dans la prédiction de la compacité granulaire de mélanges différents. Ces derniers mélanges n'ont pas fait partie de la base de données d'apprentissage. Cette démarche nous permettra de mieux cerner l'intervalle de confiance du modèle et mieux évaluer les performances du modèle sur de nouveaux mélanges. Le tableau 4, récapitule les résultats de compacité mesurée expérimentalement et calculés pour ces nouveaux mélanges.

Tableau 4. Récapitulatif de la compacité expérimentale, par le RENE LCPC et estimée par le modèle PG n°2, sur d'autres mélanges.

Mélange/Y1	K « Coefficient de serrage »	Comp. RENE-LCPC	Comp. Expérimentale	Comp. Modèle N° 2 PG
4/16 recyclé-8/14 70%	4.5	0,499	0,611	0,619
0/4_4/16 recyclé 30%	4.5	0,494	0,690	0,749
Fillers-0/4 20%	4.1	0,849	0,699	0,738
Filler-14/20 40%	4.5	0,756	0,783	0,734
0/4_8/14 60%	4.75	0,843	0,775	0,746
0/4_14/20 80%	9	0,840	0,763	0,793
RMSE	/	0,11	/	0,03

A travers ces résultats on remarque que sur l'ensemble des nouveaux mélanges, de différentes étendues granulaires $d1/d2$, de coefficient de compactage K et de pourcentage de fines $Y1$ différents, le modèle issu de la PG, ne perd pas de sa capacité de prédiction, avec un RMSE= 0,03. L'outil RENE LCPC quant à lui donne une RMSE=0,11.

3. Conclusion

La compacité granulaire est un problème commun à beaucoup d'applications dans le domaine du génie civil, sa modélisation demeure primordiale pour une meilleure prédiction des autres caractéristiques dont on dépend, telles que l'ouvrabilité ou la résistance mécanique du béton.

Pour modéliser la compacité granulaire, nous avons utilisé dans le présent travail la Programmation Génétique (PG). Ces outils d'apprentissage automatique, sur la base d'expériences, permettent de modéliser des problèmes complexes. Nous avons en premier lieu déterminé les Inputs et les Outputs du système sur la base d'essais expérimentaux. Après paramétrage de l'algorithme, sur une base de données de 133 enregistrements, nous proposons un modèle prédictif de la compacité d'un mélange granulaire à concentration donnée de ce mélange, à partir de grandeurs physiques des composants aisément accessibles à l'expérience.

Le modèle de compacité développé par la PG présente un RMSE de 0.02 sur les 133 mélanges granulaires réalisés, contre un RMSE de 0.07 pour le logiciel RENE LCPC. Dans l'étape de validation, sur d'autres mélanges granulaires, de nature et dosages différents, le modèle de la PG confirme sa grande capacité de prédiction en comparaison avec l'outil RENE LCPC.

Le modèle de la PG se démarque par sa grande capacité de prédiction de la compacité d'un mélange binaire même dans le cas d'utilisations des fines ou de matériaux alternatifs comme les granulats recyclés, ainsi que l'avantage de simplicité du fait qu'il intègre comme paramètres d'entrées uniquement la granularité (C_c , d_{moy}), la compacité propre et le dosage des composants. Ce modèle nous servira également de fonction objective dans l'optimisation du squelette granulaire dans les problèmes d'optimisation multiobjectifs comme la formulation du béton ou en technique routière.

4. Bibliographie

- [AGR 10] AGRAWALAND V, SHARMA A, Prediction of Slump in Concrete using Artificial Neural Networks, *World Academy of Science, Engineering and Technology, Vol:4*, 2010.
- [BER 04] BERNIER G., Formulation des bétons, *Techniques de l'ingénieur*, 2004.
- [BOU 12] BOUGUETTAYA W., La programmation automatique : outils de la programmation génétique et certaines de ses applications, Mémoire de Magister, Université de Tlemcen, 2012.
- [DEL 00] DE LARRARD F., *Structure granulaire et formulation des bétons, OA34 LCPC*, 2000.
- [ELB 05] EL BARRAK M., Contribution à l'étude de l'aptitude à l'écoulement des bétons autoplacants à l'état frais, Thèse de Doctorat, Université Toulouse III – Paul Sabatier, U.F.R. P.C.A, 2005.
- [GAB 07] GABRYSIK F., *Matériaux, Les granulats*, Strasbourg, Académie de Nancy-Metz, chapitre 2, 2007.
- [KOZ 92] KOZA J R., Genetic Programming, On the Programming of Computers by Means of Natural Selection, *A Bradford Book The MIT Press*, 1992.
- [PÉR 12] PÉREZ J L., CLADERA A., RABUÑAL J R., MARTÍNEZ-ABELLA F., Optimization of existing equations using a new Genetic Programming algorithm: Application to the shear strength of reinforced concrete beams, *Advances in Engineering Software 50 (2012) 82–96*, 2012.
- [POU 01] POULIOT N., SEDRAN T., DE LARRARD F., MARCHAN J., Prédiction de la compacité des bétons compactés au rouleau à l'aide d'un modèle d'empilement granulaire, *Bulletin des Laboratoires des Ponts et Chaussées-233-Réf. 4370-PP.23-36*, 2001.
- [SEB 10] SEBAIBI N., Valorisation des composites therm durcissables issus du recyclage dans une matrice cimentaire : application aux bétons à ultra-haute performance, Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Douai, 187 p, 2010.
- [SED 94] SEDRAN T., DE LARRARD F., RENÉ-LCPC - Un logiciel pour optimiser la granularité des matériaux de génie civil", Note technique, *Bulletin de Liaison des Laboratoires des Ponts et Chaussées, N°194*, 1994.