
Méthode de régularisation énergétique basée sur l'approche Crack Band : Limites d'application et sources d'erreurs

N. Aissaoui, M. Matallah

RiSAM, Université de Tlemcen, BP230 Tlemcen, Algérie
(mohammed.matallah@gmail.com;matallah@mail.univ-tlemcen.dz)

RÉSUMÉ. Dans ce travail, la technique de régularisation énergétique basée sur l'approche Crack Band est étudiée. L'objectif principal de ce travail est d'identifier les sources d'erreurs liées à l'utilisation de cette approche dans le cas d'un calcul de structure générant des états de contraintes bidimensionnel ou tridimensionnel. La prise en compte de la dissipation plastique dans la formulation de l'énergie de fissuration est également discutée. Des développements mathématiques et des simulations numériques sont présentés afin de comprendre les limites d'application de cette méthode.

ABSTRACT. In this work, the energetic-regularization technique based on the Crack Band approach is studied. The main objective is to identify the sources of errors related to the application of such technique under 2D and 3D computational analysis. The effect of the plastic dissipation is also discussed. Mathematical developments and numerical simulations are proposed in order to assess the limits of application of this technique.

MOTS-CLÉS : Energie de fissuration, localisation, calcul de structure, plasticité.

KEYWORDS: Fracture energy, localization, structural analysis, plasticity.

1. Introduction

La modélisation numérique est un outil incontournable dans le domaine de l'analyse et l'étude des structures/ouvrages de génie civil. Elle contribue à la compréhension du comportement mécanique des matériaux utilisés dans les constructions afin de maîtriser les mécanismes entraînant leur dégradation et permettre ainsi la prédiction de leur comportement sous diverses sollicitations. La simulation numérique du comportement non linéaire du béton est confrontée à un problème majeur de localisation dû principalement à la présence de l'adoucissement. La non-prise en compte de ce phénomène aboutit à une analyse non objective.

La propriété de l'adoucissement entraîne une perte d'ellipticité des équations d'équilibre lors d'une analyse quasi statique et une perte d'hyperbolicité pour une analyse dynamique. Lors d'une modélisation par éléments finis classique, à l'intérieur de chaque élément, les champs de déplacement et de déformation sont continus et les sauts de déformations sont « reportés » aux frontières des éléments. Il en résulte une localisation des déformations dans une bande dont l'épaisseur est contrôlée directement par la taille des éléments finis. Si le maillage EF est très raffiné, la taille de la bande de localisation diminue également. Etant donné que l'énergie de rupture est liée au volume de la zone de localisation, si la taille des éléments finis tend vers zéro, une structure peut atteindre la ruine sans dissiper de l'énergie [NEE 84]. Pour remédier à ce problème, différentes méthodes ont été développées. On peut distinguer deux approches : Celle basée sur l'enrichissement du modèle continu [PIJ 87][PEE 01][DEB 91] et une seconde voie basée sur l'enrichissement de la cinématique du modèle numérique (Introduction d'une discontinuité cinématique [HIL 76][BEL 88]).

Une autre technique plus simple mais très utilisée dans le domaine de l'engineering est celle basée sur une régularisation énergétique. Elle est fondée sur l'utilisation de l'énergie de fissuration G_f comme paramètre de régularisation afin de remédier au problème de localisation lors d'un calcul de structure. Issue de l'approche « Crack Band » [BAZ 83] où on suppose qu'une fissure en mode I est étalée sur une bande de largeur h , l'énergie libérée pour ouvrir une fissure est directement liée à l'aire sous la courbe contrainte-déformation.

Cette approche énergétique ne permet pas de résoudre le problème mathématique (perte d'ellipticité ou perte d'hyperbolicité). L'énergie de fissuration est injectée dans un calcul élément finis afin de préserver la dissipation et de la rendre indépendante de la taille des éléments finis, ce qui permet d'assurer une objectivité vis-à-vis du maillage et remédier ainsi aux conséquences numériques de la localisation. D'un point de vue pratique, la valeur de G_f contrôle le processus de dissipation lors de la dégradation du matériau à travers un paramètre de la loi de comportement utilisée (loi d'endommagement et/ou de plasticité). L'approche énergétique peut être utilisée seulement si la formulation de la loi de comportement permet d'établir une relation directe entre le paramètre de la loi contrôlant l'adoucissement et le paramètre G_f . Cette relation directe est généralement obtenue pour un cas unidimensionnel, ie, dans un élément finis soumis à un état de contrainte uniaxial. Cependant, il a été mis en évidence (flexion simple par exemple) [JIR12] [MAT13] que même si l'état de fissuration reste en mode I (principe de base de l'approche crack band), l'état de contrainte n'est pas toujours uni-axial.

Dans [JIR12], Jirasek et Bauer ont examiné les aspects numériques liés à l'utilisation de cette méthode énergétique. L'influence du type des éléments finis utilisés, du schéma d'intégration ... ont été étudiés afin de détecter les sources d'erreurs liés aux aspects numériques. Dans le présent travail, on propose une étude complémentaire. Les aspects mathématiques de cette approche sont discutés notamment ceux liés à son utilisation dans le cas d'un état de contraintes non-uniaxial (2D et 3D). Un autre aspect très important lié à la présence des déformations plastiques (ou irréversibles de façon générale) dans la formulation de la loi de comportement est également discuté. En effet, pour reproduire le comportement non linéaire du béton, le couplage avec la plasticité est nécessaire. La non-prise en compte de ces déformations irréversibles dans la formulation de G_f conduit à une dissipation erronée. Des développements mathématiques sont réalisés pour comprendre l'évolution de l'énergie de fissuration en fonction des rapports entre les composantes du tenseur de contraintes en 2D/3D. Ces développements sont validés par des exemples numériques. Les développements mathématiques ainsi que les simulations numériques réalisées montrent que cette approche doit être utilisée avec précaution. L'état de contraintes auquel est soumis l'élément finis contrôle principalement la dissipation ce qui génère parfois une dissipation très différentes de celle voulue par l'utilisateur.

2. La régularisation énergétique

Dans une formulation de loi de comportement non linéaire, l'aire sous la courbe contrainte déformation représente la densité d'énergie dissipée par unité de volume

$$W = \int_0^{\infty} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \quad [1]$$

et le produit de cette quantité par la largeur de la zone de localisation h représente l'énergie de fissuration G_f nécessaire pour créer une surface unité de fissuration (énergie dissipée par unité de surface)

$$G_f = \int_0^{\infty} \sigma du = hW \quad [2]$$

Pour représenter le processus de fissuration en mode I, Bazant et Oh [BAZ 83] considèrent une distribution de fissure constante sur une bande de largeur h , ce qui permet de calculer le saut de déplacement du comme le produit de la déformation de rupture (d'ouverture de fissures) ε^f par la largeur de la bande h ce qui permet d'écrire

$$G_f = \int_0^{\infty} \sigma du = h \int_0^{\infty} \sigma d\varepsilon^f \quad [3]$$

En utilisant l'approche énergétique, le processus de rupture (de fissuration) dans le béton est ainsi gouverné par l'énergie de fissuration. La valeur de l'énergie de fissuration contrôle le processus de dissipation lors de la dégradation du matériau via un paramètre de la loi de comportement non linéaire qui contrôle l'adoucissement. Dans ce qui suit, afin de garantir une analyse cohérente, une seule loi d'endommagement isotrope couplée à plasticité est utilisée [FIC93]. La loi s'écrit

$$\sigma_{ij} = (1-d)\tilde{\sigma}_{ij} = (1-d)C_{ijkl}^0(\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^p) \quad [4]$$

L'évolution de l'endommagement est décrite par une loi d'évolution exponentielle fonction de la déformation équivalente. Pour cette déformation, nous utilisons la définition de Mazars [MAZ84]

$$d = 1 - \frac{\tilde{\varepsilon}_e}{\varepsilon_{d0}} \exp(B(\tilde{\varepsilon}_e - \varepsilon_{d0})) \quad \tilde{\varepsilon}_e = \sqrt{\langle \varepsilon_e^1 \rangle_+^2 + \langle \varepsilon_e^2 \rangle_+^2 + \langle \varepsilon_e^3 \rangle_+^2} \quad [5]$$

Et la plasticité est décrite par un critère de Nadai en utilisant la loi de normalité [FIC93].

$$\varepsilon_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{dF_i}{d\tilde{\sigma}_{ij}} \quad [6]$$

Où $\dot{\lambda}$ est le multiplicateur plastique et F_i la fonction de charge (de compression ou de traction)

Dans sa version originale, le modèle ne permet pas de faire une régularisation complète. En effet, l'évolution non linéaire des déformations plastiques ne permet pas d'établir une relation directe entre l'énergie de fissuration et le paramètre contrôlant l'adoucissement. Ceci est valable pour tous les modèles couplant plasticité et endommagement. Les lois d'évolution de l'endommagement et des déformations plastiques doivent permettre un calcul correct de l'énergie de fissuration.

En ce qui concerne le modèle que nous avons choisi, afin d'obtenir cette relation, on néglige la dissipation due à la partie plastique $\varepsilon_e = \varepsilon - \varepsilon_p = \varepsilon$. Pour un cas unidimensionnel avec un mode I de propagation de fissure, on obtient [MAT 10]

$$G_f = h \int_0^{\infty} E(1-d)\varepsilon d\varepsilon = h \int_0^{\infty} E \left(\frac{\varepsilon_{d0}}{\varepsilon} \exp[B(\varepsilon_{d0} - \varepsilon)] \right) \varepsilon d\varepsilon = h \frac{E\varepsilon_{d0}^2}{2} + h \frac{E\varepsilon_{d0}}{B} \quad [7]$$

Avec h la taille de l'élément fini utilisé et B le paramètre contrôlant l'adoucissement.

Dans ce qui suit, nous discutons les problèmes liés à la non-prise en compte de la dissipation plastique. Les aspects bidimensionnels et tridimensionnels de cette approche sont également évoqués.

1.1. Cas d'une analyse Unidimensionnelle

Dans le cadre d'une analyse 1D (Traction uni-axiale par exemple). La formulation proposée dans l'équation [7] ne permet pas de prendre en compte la dissipation plastique. Afin de simplifier le calcul de

l'intégral dans l'équation [7], la formulation du critère de rupture duquel dérivent les évolutions des déformations plastiques est modifiée. Le critère de Nadai est remplacé par un double critère de Drucker-Prager

$$\begin{cases} F_t = \alpha_t J_2(\tilde{\sigma}_{ij}) + \beta_t I_1(\tilde{\sigma}_{ij}) - w(p) - w_0 \\ F_c = \alpha_c J_2(\tilde{\sigma}_{ij}) + \beta_c I_1(\tilde{\sigma}_{ij}) - w(p) - w_0 \end{cases} \quad [8]$$

L'évolution non linéaire de la variable interne plastique est remplacée par une évolution plastique linéaire :

$$w = p^* q + w_0 \quad [9]$$

La loi de normalité permet de calculer l'évolution de la déformation plastique. Dans le cas de la traction uniaxiale, on obtient :

$$\dot{p} = -\dot{\lambda} \frac{dF_t}{dw} = -\dot{\lambda} \frac{d(\tilde{\sigma} - w(p) - w_0)}{dw} = \dot{\lambda} \quad [10]$$

La condition de consistance $F_t = \tilde{\sigma} - w(p) - w_0 = 0$ nous permet d'écrire

$$\dot{\tilde{\sigma}} = E(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^p) = q\dot{p} = q\dot{\lambda} = q \left(\frac{\dot{\varepsilon}^p}{dF_t / d\tilde{\sigma}_{ij}} \right) \quad [11]$$

L'évolution de la déformation plastique est ainsi donnée par

$$\dot{\varepsilon}^p = \frac{E}{E + \frac{q}{dF_t / d\tilde{\sigma}_{ij}}} \dot{\varepsilon} \Rightarrow \varepsilon^p = \frac{E}{E + \frac{q}{dF_t / d\tilde{\sigma}_{ij}}} (\varepsilon - \varepsilon_{d0}) \quad [12]$$

Avec cette évolution, la dissipation plastique peut être prise en compte, et la relation reliant l'énergie de fissuration au paramètre B contrôlant l'adoucissement s'écrit

$$G_f = h \int_0^{\infty} E(\varepsilon_{d0} \exp[B(\varepsilon_{d0} - \varepsilon + \varepsilon^p)]) d\varepsilon = h \frac{E\varepsilon_{d0}^2}{2} + h \frac{E\varepsilon_{d0}}{B(1-\zeta)} \quad [13]$$

Avec $\zeta = E / (E + \frac{q}{dF_t / d\sigma})$. Le paramètre de l'adoucissement est donné par

$$B = \frac{1}{(1-\zeta)} \frac{2Eh\varepsilon_{d0}}{2G_f - hE\varepsilon_{d0}^2} \quad [14]$$

L'équation 14 impose des restrictions sur la taille de l'élément fini utilisé. Le paramètre B est strictement positif ce qui limite les valeurs de h .

$$2G_f - hE\varepsilon_{d0}^2 > 0 \Rightarrow h < \frac{2G_f}{f_t \varepsilon_{d0}} \quad [15]$$

Pour illustrer le mécanisme de dissipation sur un cas 1D, un volume élémentaire est soumis à la traction dans une direction. Les calculs sont réalisés en contrainte plane et les paramètres du modèle utilisés sont $F_t = 3 \text{ MPa}$, $G_f = 150 \text{ N/m}$, $E = 30 \text{ GPa}$

Numériquement, on calcule la densité de dissipation (équation [1]) multipliée par la taille de l'élément fini h que l'on fait varier de 1mm à 1 cm. La valeur de G_f dissipée réellement dans l'élément est comparée à celle injectée comme paramètre d'entrée. Les résultats de comparaisons sont illustrés dans le Tableau 1

Tableau 1. Résultats numériques de G_f dans le cas d'une analyse 1D (G_f injectée = 150N/m)

Dimension h (m)	Sans prise en compte de la dissipation plastique (équation 7)	Avec prise en compte de la dissipation plastique (équation 13)
1e-3	2581,6	149.21
1e-2	1730,8	150.01
1e-1	1669,1	150.10

Ces résultats montrent clairement qu'en utilisant un modèle élasto-plastique, si la dissipation due à la plasticité n'est pas correctement prise en compte, l'énergie dissipée réellement est très différente de celle injectée dans les calculs ceci conduit à des résultats de calculs erronés.

1.2. Cas d'une analyse 2D

En utilisant la même loi de comportement, Matallah et al [MAT 13] ont mis en évidence que, pour un cas de flexion simple, même si l'état de fissuration est en mode I, la présence d'un état de contrainte biaxial modifie la dissipation à l'intérieur de l'élément.

Si on ne considère dans la loi de comportement précédemment développé que l'endommagement en désactivant la plasticité (cela ne signifie pas une non-prise compte de la dissipation plastique mais une désactivation complète) et si γ est le rapport de contraintes σ_2/σ_1 on obtient les formules suivantes pour le G_f [MAT 13] (0.2 est la valeur de coefficient de poisson) :

$$\gamma < 0.2 \Rightarrow G_f = h\eta_1 E \left(\frac{\varepsilon_{d0}}{B} + \frac{\varepsilon_{d0}^2}{2} \right) \quad [16]$$

$$\gamma \geq 0.2 \Rightarrow G_f = h\eta_2 E \left(\frac{\varepsilon_{d0}}{B} + \frac{\varepsilon_{d0}^2}{2} \right) \quad [17]$$

avec

$$\eta_1 = \left(\frac{(1-2\gamma\nu + \gamma^2)}{(1-\gamma\nu)^2} \right), \eta_2 = \eta_1 = \left(\frac{(1-2\gamma\nu + \gamma^2)}{(1-\gamma\nu)^2 + (\gamma-\nu)^2} \right) \quad [18]$$

Ces formules sont valables pour des rapports de contraintes positifs. Dans le cas de la présence d'une contrainte négative (de compression), les formules sont plus complexes. La prise en compte de la plasticité complique davantage le calcul de G_f . Les développements mathématiques concernant ces deux aspects ne sont pas discutés dans le présent travail. Nous nous intéressons principalement à démontrer les erreurs que l'on peut commettre dans le cas d'une analyse 2D. Considérons un volume élémentaire soumis à un état de contrainte biaxial avec un rapport $\gamma=1$. Les simulations sont réalisées avec le même jeu de paramètres utilisé pour la simulation 1D. Deux types d'analyse sont réalisés : la première avec une formule de G_f 1D (équation 7) et l'autre en considérant la formule 2D (équation 17). En réalité, lors d'un calcul de structures, on utilise toujours la formule 1D quel que soit le type d'analyse. Le Tableau 2 illustre la dissipation réelle dans l'élément dans les deux cas d'étude. L'erreur commise en considérant une formulation 1D de l'énergie de fissuration est de l'ordre de 25%.

Tableau 2. Dissipation réelle dans l'élément dans le cas d'une analyse 2D (G_f injectée =150 N/ m)

Dimension L (m)	Simulation réalisée avec la formule 2D (équation 17)	Simulation réalisée avec la formule 1D (équation 7)
1e-3	150.01	187.51
1e-2	150.01	187.51
1e-1	149.99	187.48

3. Aspects théoriques de l'approche Crack Band en 3D

Nous proposons dans cet article une expression analytique de l'évolution de l'énergie de fissuration dans le cas d'une analyse tridimensionnelle. Soumettons un volume élémentaire à un état de contrainte triaxial de traction, l'énergie de rupture est évaluée par :

$$G_f = h \times \left(\sum_{I=10}^3 \int \sigma_I d\varepsilon_I \right) \quad [19]$$

avec $\sigma_I, \varepsilon_I, I=1,2,3$ les contraintes et les déformations principales dans la direction I.

Dans notre étude nous adoptons $h = \sqrt[3]{V_{elem}}$ tel que V_{elem} est le volume de l'élément fini. Notons γ_1 le rapport de contrainte σ_2/σ_1 et γ_2 le rapport de contrainte σ_3/σ_1 .

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{\tilde{\sigma}_2}{\tilde{\sigma}_1} = \gamma_1 \Rightarrow \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{\gamma_1(1-2\nu) + (\gamma_2+1)(2\nu^2-\nu)}{1-2\nu + (2\nu^2-\nu)(\gamma_1+\gamma_2)} \quad [20]$$

$$\frac{\sigma_3}{\sigma_1} = \frac{\tilde{\sigma}_3}{\tilde{\sigma}_1} = \gamma_2 \Rightarrow \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1} = \frac{\gamma_2(1-2\nu) + (\gamma_1+1)(2\nu^2-\nu)}{1-2\nu + (2\nu^2-\nu)(\gamma_1+\gamma_2)} \quad [21]$$

Selon les signes des rapports de déformations nous distinguons quatre domaines. Le Tableau 3 illustre les quatre différentes zones et les valeurs de G_f correspondantes.

Tableau 3. Formules de G_f dans le cas d'une analyse 3D

Zone 1	$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_1$	$G_f = h\eta_1 E \left(\frac{\varepsilon_{d0}^2}{2} + \frac{\varepsilon_{d0}}{B} \right)$
Zone 2	$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_1 \frac{\sqrt{(1-2\nu + (2\nu^2-\nu)(\gamma_1+\gamma_2))^2 + (\gamma_1(1-2\nu))^2}}{1-2\nu + (2\nu^2-\nu)(\gamma_1+\gamma_2)}$ $+ \varepsilon_1 \frac{\sqrt{(2\nu^2-\nu)(\gamma_2+1))^2 + (\gamma_2(1-2\nu) + (2\nu^2-\nu)(\gamma_1+1))^2}}{1-2\nu + (2\nu^2-\nu)(\gamma_1+\gamma_2)}$	$G_f = h\eta_2 E \left(\frac{\varepsilon_{d0}^2}{2} + \frac{\varepsilon_{d0}}{B} \right)$
Zone 3	$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_1 \frac{\sqrt{(1-2\nu + (2\nu^2-\nu)(\gamma_1+\gamma_2))^2}}{1-2\nu + (2\nu^2-\nu)(\gamma_1+\gamma_2)}$ $+ \varepsilon_1 \frac{\sqrt{(\gamma_1(1-2\nu) + (2\nu^2-\nu)(\gamma_2+1))^2}}{1-2\nu + (2\nu^2-\nu)(\gamma_1+\gamma_2)}$	$G_f = h\eta_3 E \left(\frac{\varepsilon_{d0}^2}{2} + \frac{\varepsilon_{d0}}{B} \right)$
Zone 4	$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_1 \frac{\sqrt{(1-2\nu + (2\nu^2-\nu)(\gamma_1+\gamma_2))^2}}{1-2\nu + (2\nu^2-\nu)(\gamma_1+\gamma_2)}$ $+ \varepsilon_1 \frac{\sqrt{(\gamma_2(1-2\nu) + (2\nu^2-\nu)(\gamma_1+1))^2}}{1-2\nu + (2\nu^2-\nu)(\gamma_1+\gamma_2)}$	$G_f = h\eta_4 E \left(\frac{\varepsilon_{d0}^2}{2} + \frac{\varepsilon_{d0}}{B} \right)$

Avec

$$\eta_1 = \frac{(1-3\nu+4\nu^3)[(1-2\nu)(1+\gamma_1^2+\gamma_2^2)+2(2\nu^2-\nu)(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_1\gamma_2)]}{(1+\nu)(1-2\nu)[1-2\nu+(2\nu^2-\nu)(\gamma_1+\gamma_2)]^2} \quad [22]$$

$$\eta_2 = \frac{\sqrt{(1-2\nu+(2\nu^2-\nu)(\gamma_1+\gamma_2))^2+(\gamma_1(1-2\nu))^2}}{1-2\nu+(2\nu^2-\nu)(\gamma_1+\gamma_2)} + \frac{\sqrt{(2\nu^2-\nu)(\gamma_2+1))^2+(\gamma_2(1-2\nu)+(2\nu^2-\nu)(\gamma_1+1))^2}}{1-2\nu+(2\nu^2-\nu)(\gamma_1+\gamma_2)} \quad [23]$$

$$\eta_3 = \frac{(1-3\nu+4\nu^3)[(1-2\nu)(1+\gamma_1^2+\gamma_2^2)+2(2\nu^2-\nu)(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_1\gamma_2)]}{(1+\nu)(1-2\nu)[(1-2\nu+(2\nu^2-\nu)(\gamma_1+\gamma_2))^2+(\gamma_2(1-2\nu)+(2\nu^2-\nu)(\gamma_1+1))^2]} \quad [24]$$

$$\eta_4 = \frac{(1-3\nu+4\nu^3)[(1-2\nu)(1+\gamma_1^2+\gamma_2^2)+2(2\nu^2-\nu)(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_1\gamma_2)]}{(1+\nu)(1-2\nu)[(1-2\nu+(2\nu^2-\nu)(\gamma_1+\gamma_2))^2+(\gamma_1(1-2\nu)+(2\nu^2-\nu)(\gamma_2+1))^2]} \quad [25]$$

Les résultats de simulations sont présentés dans le Tableau 4. La simulation porte sur un élément de volume soumis à un état de contrainte tridimensionnelle avec $\gamma_1=1$ et $\gamma_2=1$ ce qui correspond à une formule de G_f de la zone 2.

Tableau 4. Dissipation réelle dans l'élément dans le cas d'une analyse 3D (G_f injectée = 150 N/ m)

Dimension L (m)	Simulation réalisée avec la formule 3D (Zone 2)	Simulation réalisée avec la formule 1D (équation 7)
1e-3	150.01	250
1e-2	150.01	250
1e-1	149.99	249.85

Le tableau 4 illustre la dissipation réelle dans l'élément dans le cas d'une analyse 3D. En utilisant une formulation G_f issue d'une analyse unidimensionnelle l'erreur commise est considérable. L'énergie de fissuration réellement dissipée dans l'élément est très différente de celle injectée dans l'élément contrairement à une formulation 3D qui permet une conservation de l'énergie.

4. Conclusion

La méthode de régularisation énergétique est un outil pratique qui permet de remédier (complètement ou partiellement) au problème de dépendance aux maillages lors d'un calcul de structures. Cette méthode, qui permet dans certaines situations de faire un gain en temps de calcul considérable, doit être utilisée avec précaution. Dans un calcul de structures générant un état de fissuration en mode I, les éléments sont soumis à des états de contraintes très variés. Le paramètre de la loi de comportement qui permet d'ajuster l'adoucissement afin de contrôler la dissipation de chaque élément est calculé en supposant un état de contrainte uni-axial. Ceci conduit à fausser (surestimer ou sous-estimer) la dissipation dans les éléments qui subissent des états de contraintes non uniaxiales. La prise en compte d'une formulation de G_f qui tiendrait compte de l'état de contrainte permet de conserver la dissipation (G_f injectée = G_f dissipée). Néanmoins, chaque état de contrainte génère une formulation différente et étant donné que l'état de contrainte auquel est soumis l'élément fini varie pendant le calcul, il devient difficile de tenir compte de ces formulations dans un calcul éléments finis. Un autre problème lié à la présence des déformations plastiques (irréversibles) a été discuté. Les aspects 2D et 3D relatifs à ce point n'ont pas été présentés. Seul le cas 1D a été discuté. Mathématiquement, l'intégration de la dissipation plastique dans la formule de G_f n'est pas une tâche facile. Cela dépend principalement de la formulation de la loi de comportement. La non-prise en compte de la dissipation plastique dans la formulation de l'énergie de fissuration conduit à des résultats erronés. Ces erreurs peuvent être amplifiées dans le cas d'un état de contrainte non uni-axial.

Bibliographie

- [BAZ 83] BAZANT ZB., OH BH., «Crack band theory for fracture of concrete», *Mater Structu*, 16, 1983, p. 155-177.
- [BEL 88] BELYTSCHKO T., FISH J., ENGLEMAN BE. "A finite element with embedded localization zones" *Comput. Meth. in Appl. Mech. Engng.*, 70, 1988, p. 59-89.
- [DEB 91] DE BORST R., SLUYS LJ. "Localisation in a Cosserat continuum under static and dynamic loading conditions" *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng*, 90, 1991, p. 805-827.
- [FIC 96] FICHANT S., « Endommagement et anisotropie induite du béton de structures. Modélisations approchées », Phd Thesis, ENS Cachant France., 1996.
- [HIL 76] HILLERBORG A., MODÉER M., PETERSON PE., « Analysis of crack propagation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements », *Cem Concr Res.* 4, 1976, p. 773-82.
- [JIR 12] JIRASEK M., BAUER M., « Numerical Aspects of the crack band approach », *Computer and Structures*, 110-111, 2012, p. 60-78.
- [MAT 13] MATALLAH M., FARAH M., GRONDON F., LOUKILI A., « Size Independent Fracture Energy of Concrete at Very Early Ages by Inverse Analysis » *Engineering Fracture Mechanics*, 109, 2013, p. 1-16.
- [MAT 10] MATALLAH M., LA BORDERIE C., MAUREL O., « A practical method to estimate crack openings in concrete structures », *Int J Nume Analy Meth Geom.*, 34, 2010, p. 1615-1633.
- [MAZ 84] MAZARS J., «Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non linéaire et à la rupture du béton de structure», Thèse de Doctorat, Paris VI, France, 1984.
- [NEE 87] NEEDLEMAN A., TVERGAARD V. "Finite Element Analysis of Localisation in Plasticity." In J. Oden and G. Carey (Eds), *Finite Elements – Special Problems in Solids Volume V*, 1984, Prentice Hall Inc, p. 94-157.
- [PEE 01] PEERLINGS RJH., GEERS MGD., DE BORST R. AND BREKELMANS WAM. "A critical comparison of nonlocal and gradient-enhanced softening continua" *Int. J. Solids Struct.*, 38, 2001, p. 7723-7746.
- [PIJ 87] PIJAUDIER-CABOT G., BAZANT ZP., « Nonlocal damage theory », *J Eng Mech, ASCE* vol, 1987, p. 1512-33.